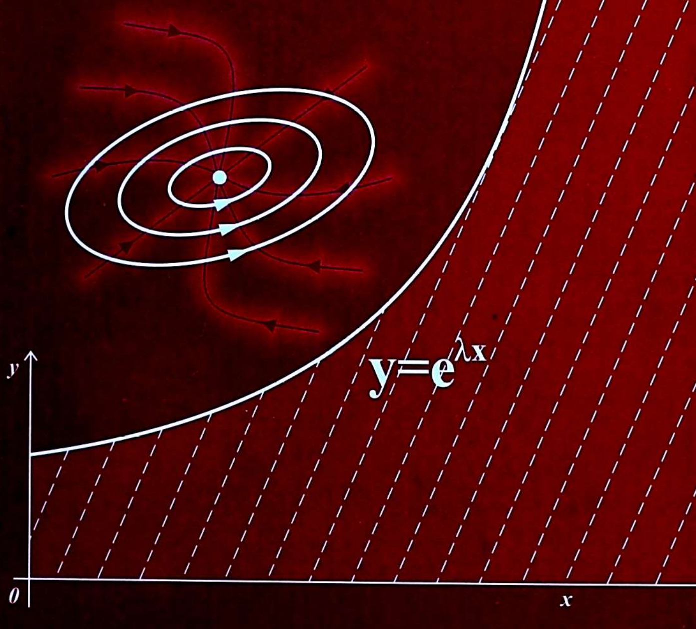
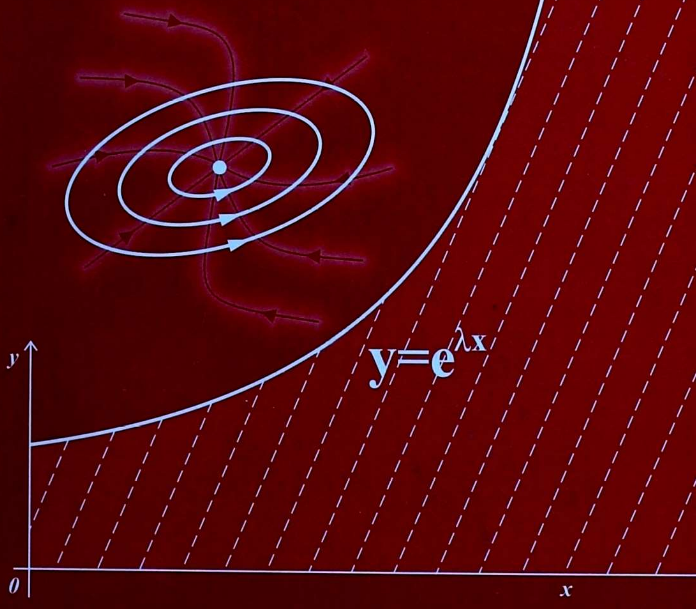
М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков,
Г.М. Кененбаева, М.Ж. Жураев.

КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ



М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков,
Г.М. Кененбаева, М.Ж. Жураев.

КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ



КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ, ИЛИМ ЖАНА ЖАШТАР САЯСАТЫ МИНИСТРЛИГИ
Ж.БАЛАСАГЫН атындагы КЫРГЫЗ УЛУТТУК УНИВЕРСИТЕТИ

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН ИЛИМДЕР УЛУТТУК АКАДЕМИЯСЫ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТУ

М.И.Иманалиев, А.Б.Байзаков,
Г.М.Кененбаева, М.Ж.Жураев

Кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу

КР Билим берүү,
илим жана жаштар саясаты
министрлиги тарабынан
ЖОЖдордун студенттери,
магистранттары үчүн окуу
куралы катары сунушталган
(Буйрук №570/1, 07 сентябрь 2006-ж.)

Бишкек 2006

УДК 517.2
ББК 22.161.6
И 50

Рецензенттер: КР ИУА кор.-мүчөсү П.С. Панков,
физ.-мат.илимдеринин д-ру, проф. А.К. Керимбеков

Жооптуу редактор: жогорку категориядагы адис Джээнбаева Г. А.

Иманалиев М.И. ж.б.

И 50 Кадимки дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу/ **М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков, Г.М. Кененбаева, М.Ж. Жураев** -Б.: 2006. – 267б.: ил.

ISBN 9967 – 02– 461 –5

Окуу куралында кадимки дифференциалдык теңдемелер багыты боюнча теориялык маалыматтар жана көп кездешкен маселелерди чыгаруунун ыкмалары, авторлордун өздөрүнүн натыйжалары келтирилген. Өз алдынча иштөө үчүн маселелер берилген. Окуу куралындагы материалдар - студенттерге табигый илимдердин ар түрдүү областтарында колдонулган дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун жана изилдөөнүн усулдук ыкмаларын үйрөтөт.

Окуу куралы университеттердин математика, физика адистигиндеги жана математика тереңдетип окутулган жогорку техникалык окуу жайларынын студенттерине, магистранттарына жана окутуучуларына арналат.

И 1602070100 – 06 УДК 517.2
ISBN 9967 – 02– 461 –5 ББК 22.161.6

Иманалиев М. И., Байзаков А. Б., Кененбаева Г. М., Жураев М.Ж.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и их применение

В пособии приводятся теоретические сведения и методы решения традиционных задач в области обыкновенных диффе-ренциальных уравнений, а также личные разработки авторов. Приведены задачи для самостоятельного решения. Материалы пособия позволяют выработать у студентов методические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений применительно к различным областям естествознания.

Пособие предназначено для студентов, магистрантов и преподавателей университетов по специальностям математика и физика, а также высших технических учебных заведений с углубленным изучением математики.

Imanaliev M.I., Baizakov A.B., Kenenbaeva G.M., Djuraev M.Dj.

Ordinary Differential Equations and Their Usage

Basic information, methods to solve traditional problems for ordinary differential equations and authors' own results are given in the text-book. Many tasks for independent work are included also. The text-book is intended to develop students' skills of investigating and solving of differential equations with applications to various branches of sciences.

Content:

Кириш сөз

Бул окуу куралы кадимки дифференциалдык теңдемелер курсу боюнча маселелерди чыгаруу методдоруна арналган. Китептин максаты - табият илиминин ар кандай областарында пайда болгон дифференциалдык теңдемелерди изилдөөнүн жана чыгарылыштарды табуунун практикалык ыктарын өздөштүрүүдө студенттерге жардам берүү.

Окуу куралына кадимки дифференциалдык теңдемелер теориясындагы типтүү маселелерди чыгаруу методдору жана алардын колдонулуштары; теоретикалык фактылар, түшүнүктөр жана алардын практикалык колдонулуштары; дифференциалдык теңдемерди чыгаруунун сандык методдору; студенттерге өз алдынча чыгаруу үчүн көнүгүүлөр киргизилген. Китептин аягында маселелерге жооптор берилген.

Авторлордун көп жылдык окутуу тажрыйбаларынын негизинде китептин мазмуну - университеттерде жана математика терендетилип окутулган жогорку техникалык окуу жайларда берилген кадимки дифференциалдык теңдемелер курсунун программасын толугу менен камтыйт.

Ошондой эле, авторлордун катышуусунда алынган бир нече илимий жыйынтыктар да келтирилген. Алар негизги курска кирбейт, бирок илимий изилдөөнү каалагандар үчүн кызыгууну жаратышы мүмкүн .

Бул окуу куралынын негизги бөлүгү жарыкка орусча чыгарылган [1].

Авторлор рецензенттер: КР ИУАнын кор.-мүчөсү П.С. Панковго, профессор А.К. Керимбековго бул окуу куралында орун алган кемчиликтерди көрсөтүп, анын сапатын жакшыртууга багытталган пикирлерин билгизгендери үчүн, ошондой эле, жогорку категориядагы адис Г.А.Джээнбаевага кол жазманы жарыкка чыгарууга даярдаган кызматы үчүн чоң ыраазычылыктарын билдиришет.

Төмөнкү стандарттуу белгилөөлөр колдонулат:

$I = (a, b)$ – интервал;

Z – бүтүн сандардын көптүгү;

$R = (-\infty, \infty)$ – анык сандардын көптүгү;

$exp(z) = e^{z}$;

<u>Кыстырма</u>. Көпчүлүк адабият булактарында / бөлүү белгиси амалдарды аткаруунун приоритетинин жалпы эрежесине карабастан колдонулуп жүрөт. Бул окуу куралында приоритеттин жалпы эрежелери сакталат, б.а. $a / b\ c$ амалдарын аткаруу: $(a / b) \cdot c$ боюнча жүргүзүлөт.

Азыркы убакытта кыргыз тилинде илимий-техникалык терминдер, ошонун ичинде дифференциалдык теңдемелер курсундагы терминдер да толук калыптана элек. Бул китепте биз негизинен [2;3] китептериндеги терминдерди колдондук.

I Глава. Негизги жоболор

§ 1.1. Негизги түшүнүктөр

Белгисиз изделген функцияны, анын туундуларын же дифференциалдарын кармаган катнаш - дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Бул теңдемеге кирген белгисиз функциянын туундусунун же дифференциалынын жогорку тартиби - дифференциалдык теңдеменин тартиби деп аталат.

Эгерде белгисиз функция бир аргументтен көз каранды болсо, анда дифференциалдык теңдеме кадимки деп аталат (бул сөз латын-англистик «*ordinary*» сөзүнөн алынган, тескерисинче «*partial*» – «айрым туундулуу» дегенди түшүндүрөт). Бул китепте кадимки дифференциалдык теңдемелер гана каралат.

Эгерде $y = \varphi(x)$ анык функциясы I аралыгында аныкталып, теңдеменин тартибине чейинки баардык тартипте үзгүлтүксүз туундуларга ээ болсо жана берилген теңдемени теңдештикке айландырса, анда ал функция кадимки дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы деп аталат.

Мисал 1.1.1. $xy' = y$ дифференциалдык теңдемесинин чыгарылышы төмөнкү түргө ээ: $y = \varphi(x) \equiv cx$; мында c – каалагандай турактуу сан. Чындыгында эле, $\varphi'(x) = c$, $x\,\varphi'(x) = \varphi(x)$ же болбосо $xc = cx$.

Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын табуу дифференциалдык теңдемени интегралдоо деп аталат.

Ар түрдүү процесстердин математикалык моделин түзгөндө келип чыккан закон бир дифференциалдык теңдеме менен жазылып калат жана ал дал келген ар түрдүү чыгарылыштардын көптүгүнө ээ болот. Ушундай мааниде түшүнсөк жогорку келтирилген мисал типтүү болот. Ошондуктан, процесс- чыгарылыштарды табуу үчүн изделген функция канааттандыра турган кошумча шарттарды берүү зарыл. Эгерде бардык шарттар аргументтин бир эле маанисинде каралса, анда аларды баштапкы шарттар деп аташат, ал эми андай болбосо чектик шарттар деп аталат. Баштапкы жана чектик шарттар биригип четки шарттар деп аталат. Дифференциалдык теңдеме чектик шарт менен бирдикте четки маселени аныктайт (баштапкы жана чектик маселе).

Кадимки дифференциалдык теңдеме менен кошо дифференциалдык теңдемелер системасы да каралат. Дифференциалдык теңдемелер системасына тийиштүү негизги түшүнүктөр жогоруда бир теңдемеге берилген түшүнүктөрдүн өзүндөй эле.

Мисал 1.1.2. $y = 5\sin 2x + \cos 2x$ функциясы

$$y''+4y=0,\ x \in R \qquad (1.1.1)$$

теңдемесинин чыгарылышы болоорун көрсөткүлө.

Чыгаруу. Берилген функцияны дифференциалдасак

$$y' = 10\cos 2x - 2\sin 2x,\ y'' = -20\sin 2x - 4\cos 2x.$$

Анда (1.1.1) теңдемеси теңдештикке айланат:

$$-20\sin 2x - 4\cos 2x + 4(5\sin 2x+\cos 2x) = 0,\quad 0 = 0.$$

Ошондой эле, $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ (мында c_1, c_2 – каалагандай сандар), функциясы да (1.1.1) дифференциалдык теңдемесин канааттандыраарын көрсөтүүгө болот.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№ 1. *Төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин тартибин аныктагыла*

а) $3xy'+y^2 = 4$; б) $2(y')^3 - y'e^{2x} = 0$;

в) $x^2y'' = (y')^2$; г) $4yy'''+3y'y'' = 0$;

д) $y^4 y''' = (y')^4$; е) $y^{(V)}+5y''+4y = \cos x$.

№ 2. *Төмөнкү берилген функциялар тиешелүү дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары болоорун аныктагыла:*

а) $y(x) = x^3 + c,\ c - const;$ $\quad y'(x) = 3x^2$,

б) $y(x) = ce^x,\ c - const;$ $\quad y'(x) = y(x)$,

в) $y(x) = cx^{-2},\ c - const;$ $\quad xy'(x) = -2y(x)$,

г) $y(x) = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x,\ c_1, c_2 - const;$ $\quad y''(x) + 9y(x) = 0$,

д) $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x},\ c_1, c_2 - const;$ $\quad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$,

е) $y(x) = x\ln x + cx,\ c - const;$ $\quad xy'(x) = y(x) + x$.

§1.2. Дифференциалдык теңдемелерге алып келүүчү табигый-техникалык маселелер

Ар кандай табигый-техникалык маселелерди математикалык модель түзүү методу менен окуп үйрөнгөндө - дифференциалдык теңдемелер пайда болушу бул параграфта келтирилди.

Мисал 1.2.1. Радиоактивдүү ажыралыш.

Радиактивдүү элементтин ажыралыш закону төмөнкүдөй айтылат: ажыралыштын ылдамдыгы терс жана ажырала элек элементтин санына пропорциялаш. Жарым ажыралыштын мезгили T ны, б.а. алгачкы сандын жарымы ажыраган убакытты билип, ажыралыш законун, б.а. дифференциалдык формада эмес, алгебралык түрүндө табуу керек.

Чыгаруу. Убакыттын t моментинде ажыралбаган элементтердин саны y болсун, ал эми $t = 0$ болгондо элементтердин алгачкы саны y_c болсун. Ажыралыш ылдамдыгы, б.а. $y'(t) \equiv dy / dt$ ажыралбаган элементтердин y санына пропорциялаш.

Ушул маселенин үлгүсүндө кадимки дифференциалдык теңдемелердин ар түрдүү жазылышын көргөзөбүз:

1) y ти t дан функция катары карап, функция жана анын туундусу ортосундагы байланышты жазалы:

$$y'(t) = -ky(t); \qquad (1.2.1')$$

2) туунду y жана t чоңдуктарынын «чексиз кичине өзгөрүүлөрүнүн» катышы катары жазылат:

$$\frac{dy}{dt} = -k\,y; \qquad (1.2.1'')$$

3) «чексиз кичине өзгөрүүлөр» же өз ара байланышкан эки чоңдуктун дифференциалдары пропорциялаш:

$$dy = -k\,y \cdot dt \text{ же}$$
$$dy + k\,y \cdot dt = 0. \qquad (1.2.1''')$$

$(1.2.1')$ - $(1.2.1'')$ - $(1.2.1''')$ формулаларында k – азырынча белгисиз оң туруктуу чоңдук, минус белгиси $dy / dt < 0$ болгондуктан коюлду, анткени y убакыттын өтүшү менен азаят.

Жалпы чыгарылышы $y = c\,e^{-kt}$, (мында $c - const$) түрдө болот.

$y(0) = y_c$ баштапкы шартын колдонуп, $c = y_c$ экенин алабыз.

Демек

$$y = y_0 e^{-kt}. \quad (1.2.2)$$

k ны табуу үчүн жарым ажыралыш шартын б.а. $y(T) = y_0 / 2$ экенин колдонолу. $t = T$, $y = y_0 / 2$ маааанилерин (1.2.2) ге коёлу: $y_0 / 2 = y_c\, e^{kT}$, мындан $k = ln2 / T$, k ны (1.2.2) барабардыгына коюп, жыйынтыгында : $y = y_0\, 2^{-t/T}$ экенин алабыз.

Ар бир y_c үчүн бул барабардык ажыралыштын конкреттүү законун туюндурат, ал эми y_c дүн мүмкүн болгон бардык маанилери үчүн мындай закондордун классын берет.

Бул жөнөкөй теңдеменин үлгүсүндө дагы бир нече кыстырмаларды келтирели.

<u>Кыстырма 1</u>. Бир эле теңдеменин ар түрдүү формада: (1.2.1),(1.2.1″),(1.2.1‴) жазылышы, ал теңдемени чыгаруунун ыкмаларын колдонуу үчүн ыңгайлуу болоорун кийинчерээк көрөбүз.

<u>Кыстырма 2</u>. Ар түрдүү колдонулуштарда аргумент адатта «убакыт» («t»деп белгиленген) же «узундук» («x» деп белгиленген) маанисин алат. Тиешелүү түрдө бул аргумент боюнча алынган биринчи туунду «ылдамдык (убакыттын берилген учурундагы)» же «функциянын графигинин жантаюсу (берилген чекиттеги)» деп аталат.

Эми төмөндөгүдөй маселе койсо болот: $(0, y_0)$ чекитинен башталып, $(T, y_0 / 2)$ аркылуу өткөн жана оңду көздөй төмөнкү эреже менен анын ар бир чекитиндеги x огуна болгон жантаюусу (жантаюу бурчунун тангенси), ушул чекиттен x огуна чейинки аралыкка пропорционалдуу ылдыйлаган ийри сызыкты тапкыла.

Бул жерде (1.2.1′) теңдеменин өзүндөй эле болгон теңдемени алабыз.

Мисал 1.2.2. <u>Эркин түшүү.</u>

Массасы m болгон материялдык чекит оордук күчүнүн таасири менен эркин түшөт. Абанын каршылыгын эсепке албастан, чекиттин кыймылынын законун табуу зарыл.

<u>Чыгаруу.</u> Чекит түшкөн вертикалдык окто эсептөөнү баштоо чекити 0 ду тандап алалы жана анын оң багытын чекиттен төмөндү каратып аныктайлы. Чекиттин абалы, t убакыт менен өзгөрө турган $y(t)$ координатасы менен аныкталат. Чекит $F = m\,\dot{g}$ оордук күчүнүн

таасири менен түшөт. Ошондуктан, Ньютондун экинчи закону боюнча, $m\,a = F$ (a – ылдамдануу). Төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg \text{ же } y''(t) \equiv \frac{d^2y}{dt^2} = g, \qquad (1.2.3)$$

(ылдамдануу ылдамдыктын туундусу же жолдон алынган экинчи туунду болуп саналат).

(1.2.3) тү эки жолу интегралдап, төмөнкүлөрдү табабыз:

$$\frac{dy}{dt}=gt+c_1,\ y(t) = \frac{gt^2}{2} + c_1t+c_2. \qquad (1.2.4)$$

(1.2.4) формуласы материялдык чекиттин кыймылынын законун аныктайт, бирок ал интегралдоонун турактууларын кармап турат, бул учурда алардын саны экиге барабар. Түшүү чекитинин 0 чекитине салыштырмалуу $y(0) = y_0$ баштапкы абалын жана анын $y'(0) = y'_0$ баштапкы ылдамдыгын билип, (1.2.4) функциялар жыйындысынын ичинен чекиттин кыймылын сүрөттөгөн бирин тандап алабыз.

Кыстырма 3. (1.2.3) теңдемесин жана жогорку тартиптеги теңдемелерди $(1.2.1''')$ сыяктуу жазууга мүмкүн эмес.

Кыстырма 4. Эгерде аргумент «узундуктун» маанисин түшүндүрсө, анда экинчи туунду «графиктин ийрилигин» түшүндүрөт.

Мисал 1.2.3. Популяциянын өсүшү.

Өзгөрбөгөн чөйрөдө айбанаттардын кандайдыр бир түрү обочолонуп жашасын. Убакыттын кичине интервалында, табигый өсүшүнүн dN саны анын N санына пропорционалдуу экени белгилүү. Айбанаттардын бул түрүнүн өсүү законун аныктагыла.

Чыгаруу. Индивидуумдардын санын көрсөткөн үзгүлтүктүү бүтүн сандык функциялардын ордуна үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функцияларды төмөнкү эреже боюнча киргизебиз. Убакыттын ар бир маанисинде үзгүлтүксүз дифференциалдануучу функциялардын бүтүн бөлүгү үзгүлтүктүү сандык фукнциялардын мааниси менен барабар. Үзгүлтүксүз катары каралган функциянын ушул касиети боюнча: $dN = a\,N\,dt$ катышын алабыз, мында a–пропорционалдуулуктун турактуу коэфициенти жана ал өсүүнүн $dN\,/\,dt$ ылдамдыгынын N санына болгон катышын туюнтат. Аны өсүү коэффициенти деп атайбыз. $dN/dt = aN$ теңдемесин интегралдап, $N = N_0 e^{a(t-t_0)}$ экенин алабыз.

Бул түрлөрдүн өсүшүнүн жакшы белгилүү болгон <u>экспоненциалдуу закону</u>: эгерде убакыт арифметикалык прогрессия боюнча өссө, анда индивидуумдардын саны геометриялык прогрессия боюнча өзгөрөт. Эгерде $a > 0$ болсо, түр өсүп көбөйөт, $a < 0$ болсо азаят, $a = 0$ болсо, түрдүн саны туруктуу бойдон калат, төрөлгөндөрдүн саны өлгөндөрдүн санын компенсациялайт.

Түрдүн өсүшүн мүнөздөгөн a санын практикада оңой эле аныктаса болот. Чындыгында эле, T убакыттын ичинде индивидуумдардын саны $exp(aT)$ эсе көбөйөт жана популяциясынын санынын өсүшүнө, кемишине же туруктуу калышына жараша бул сан бирден чоң, кичине же ага барабар болот.

Биринчи учурда, T – убакыттын ичинде индивидуумдардын саны эки эсе көбөйсүн дейли, б.а.

$$e^{aT} = 2, \text{ анда } a = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.694}{T}.$$

Экинчи учурда, T убакыттын ичинде алардын саны эки эсе азайды десек, $a = -\frac{0.694}{T}$ экенин алабыз.

Үчүнчү учурда, $a = 0$.

Убакыттын бул аралыктарын өлчөө кыйын эмес болгондуктан, биз a ны түздөн түз эле табабыз. a баштапкы моменттен көз каранды эмес экени көрүнүп турат .

Мисал 1.2.4. <u>Телонун муздашы.</u>

Ньютон аныктаган законго ылайык, телонун муздоо ылдамдыгы, телонун температурасы менен курчап турган чөйрөнүн температурасынын айырмасына пропорционалдуу. Тело T_0 температурасына чейин ысытылган дейли, курчап турган чөйрөнүн тепмпературасын туруктуу деп эсептейбиз жана T_c га барабар болсун $(T_c < T_0)$. Телонун өзгөрүүчү температурасы T менен анын муздашы убактысынын көз карандылыгын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Убакыттын t моментинде телонун температурасы T га барабар болсун, температуранын өзгөрүү ылдамдыгы dT/dt, Ньютондун закону боюнча $(T - T_c)$ га пропорционалдуу. Демек

$dT/dt = -k(T - T_c)$ болот. Минус белгиси t нын өсүшү менен телонун температурасы T нын азайгандыгы үчүн коюлду. Пропорционалдуулук коэффициент k телонун физикалык касиетинен жана да геометриялык формасынан көз каранды (томолок түрүндөгүсүнө караганда жайылтылып бет түрүндө жасалганынынан муздоо ылдамдыгы жогору экени көрүнүп турат).

Өзгөрмөлөрдү ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$dT/(T - T_c) = -k\,dt,$$

мындан $ln\,(T - T_c) = -k\,t + ln\,c$ жана $T = T_c + ce^{-kt}$.

$T > T_c$ болгондуктан, $ln|T - T_c|$ дебестен эле, $ln(T - T_c)$ деп жазсак болот.

Окурмандарга, $T_c > T_0$, б.а. тело муздабай эле, ысый турган учурду өз алдынча карап чыгышын сунуш кылабыз.

Баштапкы шарттарды б.а. $T = T_0$, $t = 0$ коюп, c ны табабыз: $T_0 = T_c + c$, $c = T_0 - T_c$.

Жыйынтыгында муздоо закону:

$$T = T_c + (T_0 - T_c)\,e^{-kt}$$ түрүндө жазылат.

Пропорционалдуулук коэфициент k нын мааниси берилиши керек же эксперименталдык жол менен телонун температурасын убакыттын кандайдыр бир t моментинде өлчөө жолу аркылуу табылат. Мисалы, эгерде $t = t_1$ убактысында $T = T_1$ болсо, анда

$$k = \frac{1}{t_1} ln \frac{T_0 - T_c}{T_1 - T_c}.$$

Теория боюнча, телонун температурасы $t \to \infty$ болгондо гана чөйрөнүн температурасы менен бирдей болоорун эскерте кетели.

<u>**Мисал 1.2.5.**</u> Туюк көлмөлөрдүн деңгээлинин термелүүсү.

Туюк суу көлмөлөрдүн деңгээлинин өзгөрүшүнө таасир берүүчү эки фактор бар. Биринчиси - активдүү фактор, ал климаттык шарттардын өзгөрүүсү менен мүнөздөлөт, б.а. дарыялардагы суулардын агып келиши менен жана суунун бууланышынын интенсивдүүлүгү менен аныкталат. Экинчиси– реактивдүү фактор, ал денгээлдин термелүүсүн жылмалаганга аракет кылат. Реактивдүү фактордун таасиринин механизми төмөндөгүдөй: термелүүнүн амплитудасы өсө баштаганда суу көлмөсүнүн бетинин күзгүсүнүн аянты чоңоёт жана аны менен кошо бууланууучу аянт да чоңоет. Буулануу өскөндүктөн деңгээлдин өсүшү басаңдайт. Деңгээлдин түшүшү тескери картинага алып келет. Ошентип, денгээлдин термелүүсү берилген тең салмактуу денгээлден алыстабаганга аракет кылат. Бул тең салмактуу деңгээл көп жылдардагы бууланунун, жаан-чачындын, агып келген сууулардын орточо санынан көз каранды болот.

Суу балансынын дифференциалдык теңдемеси

$$\nu(t)\ dt - e(t)\ F(h)\ dt = F(h)\ dh, \qquad (1.2.5)$$

түрүндө жазылат, мында t – убакыт, $\nu(t)$- көлмөгө агып келген суу, $e(t)$- көрүнгөн буулануу (буулануу минус көлмөнү бетине түшкөн жаан-чачын). $F(h)$ көлмөнүн күзгүсүнүн h дэңгээлиндеги аянты. $F(h) = a + b\ h$, мында a жана b көлмөнүн күзгүсүнүн аянтынын анын дэңгээлинен болгон көз карандылыгынын параметрлери (Ысыккөл үчүн $a = 6179,\ b = 32{,}3,\ h$ – деңиз деңгээлинен *1606м* белгиден эсептеле баштаган көлдүн дэңгээли) деп эсептеп, (1.2.5) дифференциалдык теңдемесин төмөнкү түрдө жазуу мүмкүн:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\nu(t)}{a + b\,h(t)} - e(t). \qquad (1.2.6)$$

(1.2.6) теңдемеси сызыктуу эмес болгондуктан аны биз сызыктуу теңдемеге стандарттык түрдө өзгөртөлү. $1\ /\ (a + b\ h)$ туюнтмасын $h=0$ чекитинин аймагында Тейлордун катарына ажыраталы

$$\frac{1}{a + b\,h} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}h + \ldots \qquad (1.2.7)$$

(1.2.7) ажыратылышында үчүнчү мүчөсүнөн башталган бардык мүчөлөрүн кичине чоңдук деп эсептеп, алып салса болот.

(1.2.7) ни (1.2.6) га коюп,

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{b\,v(t)}{a^2}h(t) + \frac{v(t)}{a} - e(t) \qquad (1.2.8)$$

теңдемесин алабыз, б.а. $h(t)$ га карата сызыктуу теңдемеге ээ болобуз. $v(t), e(t)$ ларды убакыттын кандайдыр бир аралыгында туруктуу деп эсептеп, анын төмөнкү чыгарылышын алабыз:

$$h(t)=h(0)\ exp(-(b\ v/a^2)\ t)+g\ a^2/(b\ v)(1-exp(-(bv/a^2)\ t)), \qquad (1.2.9)$$

мында $g = v\ /\ a - e$.

(1.2.9) теңдемеси туюк суу көлмөсүнүн деңгээлинин термелүү кыймылынын закон ченемдүүлүгүн берет. (1.2.9) теңдемесинен деңгээлдин тең салмактуу абалынан кыйшаюсу экспоненциалдык законго ээ экени келип чыгат. Бул формуланы агып келген суунун жана буулануунун орточо мааниси анча көп өзгөрүлбөйт деп, көлмөдөгү суунун деңгээлин 5 жана андан ашык жылга алдын ала прогноз жасаганга колдонсо болот. Ысыккөлдүн денгээлинин режими боюнча теориялык көрсөтүлүш [32] эмгегинде берилген.

Мисал 1.2.6. Экономикалык динамиканын модели.

$y(t)$ - кандайдыр бир чарбанын убакыттын t моментинде сатылган продукциясынын көлөмү дейли. Чарбада өндүрүлгөн бардык продукциялар кандайдыр бир туруктуу баа p менен сатылат дейли, б.а. каныга элек базардын шарты аткарылат. Анда t моментиндеги киреше $y(0) = py(t)$ болот.

$I(t)$ менен чарбаны кеңейтүү үчүн кетирилген инвестициянын чоңдугун белгилейли. Табигый өсүү моделинде продукциянын чыгаруу ылдамдыгы (акселерация) анын инвестициясынын чоңдугуна пропорциялуу деп эсептешет:

$$y' = qI(t). \tag{1.2.10}$$

Инвестициялардын $I(t)$ чоңдугу кирешенин турактуу бөлүгүн түзөт деп эсептейли, анда

$$I(t) = mY(t) = mpy(t), \tag{1.2.11}$$

мында m - пропорциялуулуктун коэфициенти (инвестициянын нормасы деп аталган) – турактуу чоңдук, $0 < m < 1$.

$I(t)$ үчүн жазылган акыркы туюнтма (1.2.11) ди (1.2.10) го коюп

$$y'(t) = ky \tag{1.2.12}$$

дифферециалдык теңдемесине келебиз, мында $k = mpq$.

Аны чыгарып, $y(t) = y_0 \exp(k(t - t_0))$ функциясын алабыз, мында $y(t_0) = y_0$.

(1.2.12) теңдемеси популяциянын өсүшүн, радиоактивдик ажыралыш процессин ж.б. процесстерди жазып сүрөттөөрүн айта кетели.

Ошондуктан А. Пуанкаре «Математика – бул ар түрдүү нерселерди бир эле ысым менен атай турган искусство» деп айткан.

Жаратылыштын процесстеринин жана кубулуштарынын көп түрдүүлүгүнүн бардыгы теңдемелердин бир нече түрүнө эле келтирилип жазылбашы белгилүү. Дифференциалдык теңдемелер чыныгы дүйнөнүн математикалык чагылдырылышы болгондуктан, чыныгы дүйнө канчалык ар түрдүү болсо, теңдемелердин дүйнөсү да ошончолук бай болот.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№3 Жанымасы менен Ох огунун оң багыты түзгөн бурчтун тангенси жанып өтүү чекитинин ординатасына түз пропорциялуу болгон ийри сызыктарды тапкыла.

№4 Эгерде абанын температурасы 20^0C ге барабар болсо жана тело 20 мин. ичинде 100^0C тан 60^0C ге чейин муздаса, анда телонун муздоо законун тапкыла. Муздагандан баштап канча убакыттан кийин анын температурасы 30^0C ге чейин төмөндөйт?

№5. Вертикалдык аба мамычасынын ар бир деңгээлиндеги басым ага жакын жайланышкан катмарлардын басымы аркылуу шартталат деп эсептеп, Р басымынын h бийиктигинен болгон көз карандылыгын тапкыла. Мында төмөнкүлөр белгилүү деп эсептегиле: деңиз денгээлиндеги (h=0) бул басым 1кг/см^2 ка барабар, ал эми 500 м бийиктикте 0,92кг/см^2 ка барабар.

<u>Көрсөтмө</u>. Абанын басымынын h бийиктиктеги катмардан $h+d\cdot h$ бийиктигиндеги катмарга өткөндөгү өзгөрүшүн Бойл-Мариоттун законун колдонуп, б.а. абанын q тыгыздыгынын чоңдугу Р басымына пропорционалдуу деп эсептегиле.

№6. Тажрыйбаларга ылайык 1 жылдын ичинде ар бир грамм радийден 0.44мг ажырайт. Канча жылдан кийин радийдин берилген санынын жарымы ажырайт?

§ 2.1. Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теорема

Туундусуна карата чечилген биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин жалпы түрү төмөнкүчө жазылат:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.1.1}$$

мында $f(x, y)$ – берилген функция.

f функциясынын аныктамасы боюнча x жана y өзгөрмөлөрү өз ара көз каранды эмес, ал эми (2.1.1) теңдемесинде y ти x тен көз каранды функция деп түшүнөөрүбүздү баса айта кетели. Көпчүлүк теоретикалык жана практикалык мааниси бар маселелерде (2.1.1) дифференциалдык теңдемесинин бардык чыгарылышынын ичинен $x = x_0$ болгондо $y = y_0$ боло турган, б.а.

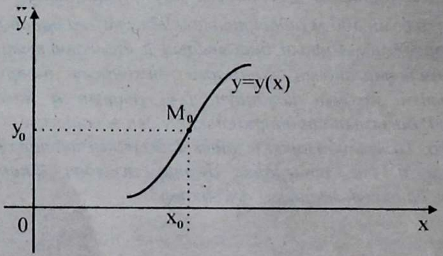
$$y(x_0) = y_0, \tag{2.1.2}$$

(мында x_0 жана y_0 – берилген сандар) шартын канааттандырган

$$y = y(x) \tag{2.1.3}$$

чыгарылышын табуу талап кылынат.

Мындай маселенин геометриялык мааниси төмөнкүчө: адын-ала берилген $M_0(x_0, y_0)$ чекити аркылуу өткөн интегралдык ийри сызыкты издеп табуу талап кылынат (1-сүрөт.).



1-сүрөт

(2.1.2) шарты (2.1.3) чыгарылышынын <u>баштапкы шарты</u>, ал эми x_0 жана y_0 сандары ушул чыгарылыштын баштапкы маанилери деп аталышат. Берилген (2.1.2) баштапкы шартты канааттандырган чыгарылышты табуу маселеси <u>Коши маселеси</u> деп аталат.

<u>Теорема 2.1.1 (Пеано)</u>. Эгерде $f(x,y)$ функциясы $M_0(x_0\ ,\ y_0)$ чекитин камтыган областта үзгүлтүксүз болсо, анда (2.1.1) теңдемеси x_0 го жетишээрлик жакын x тер үчүн, (2.1.2) шартын канааттандырган эч болбогондо бир $y = y(x)$ чыгарылышына ээ болот.

(2.1.1) - (2.1.2) Коши маселесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгынын жетиштүү шартын көрсөтөбүз. Бул үчүн төмөнкүдөй аныктамаларды киргизели.

<u>Аныктама</u>. Эгерде каалагандай x_1 жана x_2 чекиттери үчүн $[a,b]$ кесиндисинде жаткан f функциясынын өсүндүсү $|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2|$, барабарсыздыгын канааттандырса (мында $L>0$ – кандайдыр бир турактуу сан), анда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесиндисинде Липшиц шартын канааттандырат деп айтабыз.

$[a,b]$ кесиндисинде чектелген туундуга ээ болгон ар бир функция бул кесиндиде Липшицтин шартын канаатандырары көрүнүп турат. Бул Лагранждын чектүү өсүндү жөнүндөгү теоремасынан келип чыгат (текшергиле!).

<u>Теорема 2.1.2 (Пикар)</u>. $f(x,y)$ функциясы $\Pi=\{(x;y): |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\},\ a>0,\ b>0$ тик бурчтугунда үзгүлтүксүз болсун дейли жана бардык $x: |x-x_0|\le a$ жана y_1, y_2: $|y_1-y_2|\le b$ үчүн $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$ шартын канааттандырсын. $(x,y)\in\Pi$ үчүн $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|, h=\min(a,b/M)$ болсун. Анда (2.1.1) - (2.1.2) Коши маселеси $[x_0-h,\ x_0+h]$ аралыгында жалгыз гана чыгарылышка ээ болот.

<u>Далилдөө</u>. Пикар методун колдонобуз. (2.1.1) - (2.1.2) Коши маселеси

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds \tag{2.1.4}$$

интегралдык теңдемесине эквиваленттүү. Чындыгында эле (2.1.1) - (2.1.2) маселесинин чыгарылышын $y=\varphi(x)$ дейли, б.а.

$$\frac{d\varphi}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)), \;\; \varphi(x_0) = y_0.$$

Акыркы теңдештиктин эки жагын dx ке көбөйтүп, x_0 дон x ке чейин интегралдап анан баштапкы шартты колдонуп төмөнкүнү алабыз

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds,$$

б.а. $\varphi(x)$ (2.1.4) интегралдык теңдемесинин чыгарылышы болот. Тескерисинче, $\varphi(x)$ (2.1.4) теңдемесин канааттандырсын

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Эгерде бул теңдештиктин эки жагына $x = x_0$ маанисин койсок: $\varphi(x_0) = y_0$, б.а. $\varphi(x)$ (2.1.2) баштапкы шартын канааттандырат. Ушул эле теңдештиктин эки жагын x боюнча туундуласак, (2.1.1) теңдемесине келебиз.

Демек, (2.1.4) интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жашашы жана жалгыздыгын далилдесек, теореманын далилдөөсү келип чыгат. (2.1.4) интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын жашашын удаалаш жакындатуу методу менен далилдейбиз. (2.1.4) интегралдык теңдемесине кысып чагылтуу принцибин колдонууга да болот ([12] карагыла).

Нөлүнчү жакындатуу функция үчүн $y_0(x) \equiv y_0$ ду алабыз, ал эми калган жакындатууларды төмөнкү формула менен аныктайбыз:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, ds), \; n=1,2,.. \qquad (2.1.5)$$

$y_n(x)$ функцияларын ушундай түзүү процессин – удаалаш жакындатуу деп атайбыз, аны чексиз улантууга болот, б.а. $n = 1,2,\ldots$. Ошентип, биз функциялардын чексиз удаалаштыгын алабыз:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots \qquad (2.1.6)$$

Эгерде $|x - x_0| \le h$ болсо, (2.1.6) удаалаштыгынын бардык мүчөлөрү Π тик бурчтугунда жата тургандыгын көрсөтөлү. Чындыгында эле, (2.1.5) ден төмөнкүнү алабыз:

$$\left|y_n(x)-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(s,y_{n-1}(s))\,ds\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(s,y_{n-1}(s))\right|ds\right|.$$

Мындан, $n=1$ болгондо:

$$\left|y_1(x)-y_0\right|\le M\left|x-x_0\right|\le Mh=M\min\left(a,b/M\right)\le b \qquad \text{б.а.}$$

$y_1(x)\in \Pi$ ге ээ болобуз.

Математикалык индукция методун пайдаланып, $y_n(x)\in \Pi$ ден $y_{n+1}(x)\in \Pi$ келип чыгарын көрсөтөлү:

$$\left|y_{n+1}(x)-y_0\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(s,y_n(s))\right|ds\right|<M\left|x-x_0\right|\le M\,h=$$
$$=M\min\left(a,b/M\right)\le b.$$

Ошентип, бардык n үчүн $y_n(x)\in \Pi$.

Эми (2.1.6) удаалаштыгы $\left[x_0-h,x_0+h\right]$ туюк интервалында (2.1.4) теңдемесинин үзгүлтүксүз чыгарылышына бир калыпта жыйнала тургандыгын көрсөтөлү. Чындыгында эле, $y_n(x)$ ди төмөнкүчө жазса болот:

$$y_n(x)=y_1(x)+\left[y_2(x)-y_1(x)\right]+\left[y_3(x)-y_2(x)\right]+\ldots+$$
$$+\ldots+\left[y_n(x)-y_{n-1}(x)\right]$$

Ошондуктан (2.1.6) удаалаштыгынын бир калыпта жыйнала тургандыгын далилдөө үчүн төмөндөгү чексиз катардын:

$$y_1+\left(y_2-y_1\right)+\left(y_3-y_2\right)+\ldots+\left(y_n-y_{n-1}\right)+\ldots \qquad (2.1.7)$$

бир калыпта жыйналуучулугун далилдөө жетиштүү болот.

Бул үчүн $y_n(x)-y_{n-1}(x)$ айырмасын баалайлы.

$n=1$ болгондо, (2.1.5) тен төмөнкүнү алабыз:

$$\left|y_1-y_0\right|\le M\left|x-x_0\right|. \qquad (2.1.8)$$

Андан ары, $n=2,3,..$ болгондо ушунун өзүндөй эле (2.1.5)тен төмөнкүнү алабыз:

$$\left|y_2(x)-y_1(x)\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))\right]ds\right|\le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_1(s)-y_0(s)\right|ds\right|\le L\,M\left|\int_{x_0}^{x}\left|s-x_0\right|ds\right|\le M\,L\frac{\left|x-x_0\right|^2}{2};$$

$$\left|y_3(x)-y_2(x)\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x}\left[y_2(s)-y_1(s)\right]ds\right| \le M\,L^2\,\frac{\left|x-x_0\right|^3}{3!};$$

Жалпысынан

$$\left|y_n(x)-y_{n-1}(x)\right| \le ML^{n-1}\,\frac{\left|x-x_0\right|^n}{n!}\quad (x_0-h \le x \le x_0+h).$$

Ошондуктан,

$$M\left|x-x_0\right|+L\,M\,\frac{\left|x-x_0\right|^2}{2!}+\ldots+L^{n-1}\,M\,\frac{\left|x-x_0\right|^n}{n!}+\ldots \qquad (2.1.7^1)$$

катары $\left|x-x_0\right|$ дун бардык маанилеринде жыйналат. (Анткени жалпы мүчөсү $L^{n-1}M\dfrac{h^n}{n!}$ болгон жыйналуучу сан катары менен мажорантталат. Ошондуктан (2.1.7) катары да бир калыпта жыйналат жана анын суммасы $y(x)$ функциясы $\left[x_0-h, x_0+h\right]$ жабык интервалында үзгүлтүксүз функция болот. Анын графиги Π тик бурчтугунан чыкпайт. Демек, $\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$ интегралы мааниге ээ. $\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(s,y(s))-f(s,y_{n-1}(s)\right]ds\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y(s)-y_{n-1}(s)\right|ds\right|$ болгондуктан, (2.1.5) барабардыгында $n\to\infty$ үчүн пределге оң жагынан да, сол жагынан да өтсөк болот, ошондуктан $y(x)$ функциясы (2.1.4) теңдемесин канааттандырат. $\left[x_0+h, x_0-h\right]$ туюк интервалында интегралдык теңдеме жалгыз, үзгүлтүксүз, ошол себептүү чектүү чыгарылышка ээ экендигин далилдейли. Карама-каршылыкка келүү методун колдонолу. Тескерисинче, (2.1.4) теңдемесинин $y(x)$ тен айырмаланган, $\left|x-x_0\right|\le h$ сегментинде аныкталган үзгүлтүксүз $z=z(x)$ деген дагы бир чыгарылышы бар болсун дейли:

$$z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,z(s))\,ds. \qquad (2.1.9)$$

$z(x_0)=y_0=y(x_0)$ экени анык. $z(x)-y(x)$ айырмасы $\left|x-x_0\right|\le\theta$ (мында θ – жетишээрлик кичине сан) сегментинде нөлгө барабар эмес деп болжолдойлу. Анда (2.1.9) дан (2.1.4)тү мүчөлөп кемитип төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|z(x)-y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(s,z(s)) - f(s,y(s))]ds \right| \le L\theta \max|z(x)-y(x)|,$$

$|x-x_0| \le \theta.$

Ошондуктан $\max|z(x)-y(x)| \le L\theta \max|z(x)-y(x)|$, $|x-x_0| \le \theta$.

θ – жетишээрлик кичине сан болгондуктан, акыркы барабардык $\max\limits_{|x-x_0| \le \theta} |z(x)-y(x)| = 0$, шарты аткарылганда гана туура болот, б.а. $z(x)$ чыгарылышы $y(x)$ менен дал келет. Алынган $z(x_0+\theta) \equiv y(x_0+\theta)$ барабардыгын дагы колдонуп, $x_0+\theta \le x \le x_0+2\theta$ үчүн $z(x) \equiv y(x)$ экендигин далилдесек болот. ж.б.у.с. Теорема далилденди.

$y(x)$ так чыгарылышын n - жакындатуусу $y_n(x)$ менен алмаштырганда келип чыккан каталыктын баалоосу төмөнкү барабарсыздык менен берилет:

$$|y(x)-y_n(x)| \le \frac{M\,L^{n-1}}{n!}h^n.$$

Удаалаш жакындатуу методун колдонуп эсептегенде $|y_{n-1}-y_n|$ чондугу берилген каталыктан ашпай калган n де токтоо керек.

Мисал 2.1.1. $f(x,y) = y^2\cos x + x$ функциясы $\Pi = \{(x;y) : |y| \le b\}$ тилкесинде y боюнча Липшиц шартын x ке $(x \in R)$ салыштырмалуу, бир калыпта канааттандырарын текшергиле. Липшиц турактууларынын арасынан эң кичинесин тапкыла. Чыгаруу. $y_1, y_2 \in \Pi$ дейли. Төмөнкү айырманы баалайлы:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2\cos x - y_2^2\cos x| = |\cos x|\cdot|y_1+y_2|\cdot|y_1-y_2|.$$

$\sup\limits_{(x,y)\in\Pi} |\cos x|\cdot|y_1+y_2| = 2b$ болгондуктан, $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le 2b|y_1-y_2|$.

Бул болсо $f(x,y)$ функциясы Π тилкесинде y боюнча Липшиц шартын $x \in R$ ге салыштырмалуу бир калыпта канааттандырарын билдирет. Липшиц турактууларынын ичинен эң кичинеси $L = 2b$.

Мисал 2.1.2. $f(x,y) = (3+\sin x)y^{1/2}$ функциясы $\Pi = \{(x;y) : 0 \le y \le b\}$ тилкесинде y боюнча Липшиц шартын канааттандырбай турганын көрсөткүлө.

Чыгаруу. Карама-каршысын болжолдойлу. $f(x,y)$ функциясы Липшиц шартын канааттандырат дейли, б.а. бардык $x, y_1, y_2 \in \Pi$ үчүн төмөнкү шартты канааттандырган L оң саны жашасын:

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=(3+\sin x)\left|y_1^{1/2}-y_2^{1/2}\right|\le L\left|y_1-y_2\right|.$$

$y_2=0, y_1\ne 0$ десек, $x\in R$ жана $y_1 \in [0, b]$ үчүн $(3+\sin x){y_1}^{1/2}\le Ly_1$ же $(3+\sin x){y_1}^{-1/2}\le L$ экенин алабыз. Акыркы барабарсыздык болсо, y_1 маанисинин абсолюттук чоңдугу боюнча жетишээрлик кичинелери үчүн аткарылбайт. Демек, берилген функция Π тилкесинде Липшиц шартын канааттандырат деген болжолдообуз туура эмес.

Мисал 2.1.3. $\Omega=\{(x;y):|x|\le 1, |y|\le 1\}$ квадратында төмөн-кү теңдемени карайлы: $y'=x+y^2, y(0)=0$. Удаалаш жакындатуу методу менен Коши маселесинин чыгарылышынын үчүнчү жакындатуусун тапкыла. Кандай аралыкта Пикардын теоремасы удаалаш жакындатуулардын жыйналуучулугуна гарантия берет? Берилген Коши маселесинин так чыгарылышы менен табылган үчүнчү жакындатуусунун ортосундагы кетирилген каталыкты баалагыла.

Чыгаруу. $f(x,y)=x+y^2$ функциясы y боюнча үзгүлтүксүз дифференциалдана турганы көрүнүп турат жана анын y боюнча айрым туундусу $\partial f/\partial y = 2y$. Ошондуктан $f(x,y)$ функциясы Липшиц шартын канааттандырат жана анын турактуу саны $L=\max\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1}|\partial f/\partial y|=2.$

$$M=\max_{x\in\Omega}\left|f(x,y)\right|=\max_{|x|\le 1,|y|\le 1}\left|x+y^2\right|=2 \text{ болгондуктан,}$$

$$h=\min(a,b/M)=\min(1;1/2)=½.$$

Демек, берилген Коши маселесинин чыгарылышынын Пикар жакындатуулары $[-1/2, 1/2]$ аралыгында жыйналат. Жакындатууларды

$$y_{n+1}(x)=\int_0^x(s+y_n^2(s))\,ds,\ n=0,1,2,...$$

формуласы менен эсептейли:

$$y_1(x)=\int_0^x(s+0)\,ds=\frac{x^2}{2},\; y_2(x)=\int_0^x\left(s+\frac{s^4}{4}\right)ds=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20},$$

$$y_3(x)=\int_0^x\left(s+\left(\frac{s^2}{2}+\frac{s^5}{20}\right)^2\right)ds=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}+\frac{x^{12}}{4400}.$$

y(x) чыгарылышы менен табылган үчүнчү жакындатуунун айырмасын (2.1.10) формуласы менен бааланат:

$$\left|y(x)-y_3(x)\right|\le\frac{M\,L^2}{3!}\;h^3=\frac{2\cdot 2^2}{6}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{1}{6}.$$

Пикардын теоремасы удаалаш жакындатуулардын $[-1/2,\ 1/2]$ аралыгында жыйналуучулугуна гарантия берет. Үчүнчү жакындатуунун абсолюттук каталыгы *1/6* ден ашпайт.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№ 7. *Коши маселесинин чыгарылышын удаалаш жакындатуу методу менен тапкыла:*

а) $y'=y,\ \ y(0)=1$, б) $y'=x+y,\ \ y(0)=1.$

№ 8. *Төмөнкү Коши маселесинин чыгарылышынын* $y_0(x)$, $y_1(x)$ *жана* $y_2(x)$ *удаалаш жакындатууларын түзгүлө:*

а) $y'=1-(1+x)y+y^2,\ y(0)=1,$ б) $y'=y^2+3x^2-1, y(1)=1,$

в) $y'=x-y^2, y(0)=0,$ г) $y'=1+x\sin y, y(\pi)=2\pi.$

№ 9. $f(x,y)=y^{2\ 3}\cos x$ *функциясы* $\Pi=\{(x,y):|y|\le b\}$ *тилкесинде у боюнча Липшиц шартын канааттандырбасын далилдегиле.*

§2.2. Өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелер

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx \qquad (2.2.1)$$

түрүндөгү теңдемени карайлы, мында $f_1(y)$ жана $f_2(x)$ – берилген функциялар. Бул дифференциалдык теңдемеде өзгөрмөлөрү ажыраган, б.а. ар бир өзгөрмө өзүнүн дифференциалы турган жагында жайгашкан. $dy = f(x)dx$ теңдемеси - каралган теңдеменин айрым учуру болуп саналат.

(2.2.1) ди интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + c, \quad c \equiv const.$$

Мында $\int$ символу аркылуу баштапкы функциянын бирин түшүнөбүз. Эркин турактуу c ны барабардыктын каалаган бөлүгүнө жазууга болоору түшүнүктүү.

Эгерде (2.1.3) баштапкы шарты берилсе, анда турактуу c ны аныктап, берилген шартты канааттандырган айрым чыгарылышты алабыз. Аныкталган интегралдарды пайдаланып, изделген айрым чыгарылышты төмөнкүчө жазууга болот:

$$\int_{y_0}^{y} f_1(y)dy = \int_{x_0}^{x} f_2(x)dx.$$

Мында x_0 жана y_0 дун маанилери бири-бири менен тиешелүү болот, анткени барабардыкта y жана xти жогорку пределдерге, б.а ти , y_0 жана x_0 го алмаштырганда, барабардыктын эки жагы тең нөлгө айланат.

Интегралдоону түздөн түз аткарып, адатта y белгисиз функциясын айкын эмес түрдө алабыз. Эгерде (2.2.1) теңдемесинин чыгарылышы $\phi(x, y)=0$ айкын эмес түрүндө берилсе, анда аны (2.2.1) теңдемесинин интегралы деп аташат.

Мисал 2.2.1. $\frac{dy}{y} = 2x\,dx$ теңдемесинин $y|_{x=0} = 3$ баштапкы шартын канаатандырган чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Теңдеменин эки жагын тең түздөн түз интегралдап жана потенцирлегенге ыңгайлуу болсун үчүн турактууну lnC түрүндө жазып, төмөнкүгө ээ болобуз:

Эгерде турактууну $\ln C$ түрүндө алсак $ln|y| = x^2 + lnC$, $|y| = Ce^{x^2}$. Анда $C > 0$ болмок да, жалпы чыгарылышын төмөнкү түрдө жазууга туура келет эле: $y = \pm C\,exp(x^2)$. Жалпы чыгарылышка баштапкы шартты коюп C ны табабыз: $3 = C$.

Ошентип, $y = 3\ exp(x^2)$ функциясы берилген теңдеменин айрым чыгарылышы болот. Эгерде аныкталган интегралдарды колдонсок, төмөнкүгө ээ болмокпуз:

$$\int_3^y \frac{dy}{y} = \int_0^x 2x\,dx, \text{ б.а. } ln\,y\Big|_3^y = x^2\Big|_0^x \Rightarrow ln\,y - ln\,3 = x^2.$$

Потенцирлеп, ошол эле $y = 3e^{x^2}$ айрым чыгарылышын алабыз.

Көпчүлүк теңдемелер өзгөрмөлөрү ажырабаган түрдө кездешет, бирок жөнөкөй алгебралык операцияларды жүргүзүп, алардын кээ бирлеринин өзгөрмөлөрүн ажыратууга болот.

Өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелер деп

$$p_1(x)p_2(y)dx + q_1(x)q_2(y)dy = 0 \qquad (2.2.2)$$

түрүндөгү теңдемени айтабыз. $p_2(y) \neq 0, q_1(x) \neq 0$ деп эсептеп, (2.2.2) нин эки жагын $[p_2(y)q_2(x)]^{-1}$ ге көбөйтүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}dx + \frac{q_2(y)}{p_2(y)}dy = 0.$$

Мындан, интегралдап, (2.2.2)нин

$$\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(s)}{q_1(s)}ds + \int_{y_0}^{y} \frac{q_2(\eta)}{p_2(\eta)}d\eta = C$$

жалпы чыгарылышына ээ болобуз. (2.2.2) ни $[p_2(y)q_1(x)]^{-1}$ ге көбөйткөндө кээ бир айрым чыгарылыштарды жоготуп алышыбыз ыктымал. Мисалы, $y = y_0$ болгондо, $p_2(y_0) = 0$ болсун. Анда $y = y_0$ турактуу функциясы теңдеменин чыгарылышы болот. Чынында эле, $dy = 0$ жана (2.2.2) теңдемесине $p_2(y_0) = 0$ ду койсок, теңдештикке ээ болобуз. x жана y ти тең укуктуу деп карап, ушунун өзүндөй эле, эгерде $q_2(x_0) = 0$ болсо, $x = x_0$ дагы (2.2.2)нин чыгарылышы болот.

Мисал 2.2.2. $x(y+2)\,dx-(x^2+1)y\,dy=0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Өзгөрмөлөрдү ажыратып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{y\,dy}{y+2}=0.$$

Интегралдап, $\frac{1}{2}ln(x^2+1)-y+2ln|y+2|=C$ ны алабыз.

Бул жалпы чыгарылыш, анын үстүнө y өзгөрмөсү x тен көз каранды болгон функция болот. Андан башка, $y=-2$ деген айрым чыгарылышы да бар. Анын графиги $y=-2$ горизонталдуу түз сызыгы болот.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Дифференциалдык теңдемелерди чыгаргыла:

№ 10. $y'=x/y.$

№ 11. $y^2y'+x^2=1.$

№ 12. $yy'+x=0.$

№ 13. $xy'-2y=0.$

№ 14. $(x+1)y'+xy=0.$

№ 15. $y'=e^{x+y}.$

№ 16. $(1+y^2)x\,dx+(1+x^2)\,dy=0.$

№17. $xy\;dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$

§2.3. Бир тектүү теңдемелер

Эгерде 1-тартиптеги дифференциалдык теңдеме

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.3.1}$$

түрүнө же

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{2.3.2}$$

түрүнө алынып келине турган болсо, анда ал бир тектүү дифференциалдык теңдеме деп аталат, мында $P(x,y)$ жана $Q(x,y)$ – k – даражадагы бир тектүү функциялар, б.а. бардык t үчүн $P(tx,ty)=t^k p(x,y)$, $Q(tx,ty)=t^kQ(x,y)$ теңдештиги аткарылат.

$$y = u\,x,\ dy = x\,du + u\,dx \tag{2.3.3}$$

ордуна коюунун жардамы менен (2.3.1) жана (2.3.2) бир тектүү теңдемелери өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдемелерге өзгөртүп түзүлөт.

Мисал 2.3.1. $(x\,y - y^2)\,dx - (x^2 - 2\,x\,y)\,dy = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Бул теңдемени

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy} = \frac{(y/x) - (y/x)^2}{1 - 2(y/x)}.$$

түрүндө жазууга болот. (2.3.3) ордуна коюусу төмөнкү теңдемеге алып келет

$$u + xu' = \frac{u - u^2}{1 - 2u} \text{ же } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{u - u^2}{1 - 2u} - u\right),\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{u^2}{1 - 2u}.$$

Өзгөрмөлөрүн ажыратып, $\frac{1 - 2u}{u^2}du = \frac{du}{dx}$ ти табабыз, мындан

$\frac{1}{u} + 2\,ln|u| = ln\left|\frac{c}{x}\right|$ же $ln\left(exp(1/u)\,u^2\right) = ln|c/x|$, демек $u^2\,exp(1/u) = c/x$.

y өзгөрмөсүнө кайрылып келип, алгачкы теңдеменин айкын эмес түрдөгү

$$y^2\,exp(x/y) = c\,x$$

жалпы чыгарылышын алабыз.

Мисал 2.3.2.

$$(x + y)\,dx - x\,dy = 0 \tag{2.3.4}$$

теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. $y' = (x+y)\,/\,x$ ке ээ болобуз. (2.3.3) ордуна коюусу төмөнкү теңдемеге алып келет

$$u'x + u = 1 + u,\ u'x = 1.$$

өзгөрмөлөрүн ажыраталы: $du = dx\,/\,x$, $u = ln|x| + c$ экенин табабыз. y өзгөрмөсүнө кайрылып келсек $y = x\,u(x) = x(\,ln|x| + c)$, $c = const$. (2.3.4) теңдемеси $x = 0$ деген чыгарылышка да ээ (мында x өзгөрмөсү y тен көз каранды функция, бул болсо **§1.1** дагы жалпы аныктамага туура келбейт).

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелерди чыгаргыла:

№ 18. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

№ 19. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$.

№ 20. $y' = \frac{x-y}{x+y}$.

№ 21. $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy - y^2$.

№ 22. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$.

№ 23. $y^2\,dx + x^2\,dy = xy\,dy$.

№ 24. $x(y' + exp(y/x)) = y$.

№ 25. $xy' = y + x \cdot tg\frac{y}{x}$.

№ 26. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

№ 27. $(x^2 + y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$.

§ 2.4. Биринчи тартиптеги сызыктуу теңдемелер Бернулли жана Риккати теңдемелери

1^0. Биринчи тартиптеги сызыктуу теңдемелер

Эгерде биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме y жана y'ке карата сызыктуу болсо, б.а.

$$y' = p(x)\, y + q(x) \qquad (2.4.1)$$

түргө ээ болсо, анда ал сызыктуу деп аталат, мында $p(x)$ жана $q(x)$ – x өзгөрмөсүнөн көз каранды болгон белгилүү функциялар. Эгерде $q(x) \equiv 0$ болсо, анда (2.4.1) теңдемеси $y' = p(x)\, y$ түрүн алат жана бир тектүү сызыктуу теңдеме деп аталат. Ал өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме болуп саналат жана анын жалпы чыгарылышы

$$y = c\, exp(\int p(x)\, dx) \qquad (2.4.2)$$

түрүнө ээ болот, мында c – каалагандай турактуу сан, $\int p(x)\, dx$ – болсо $\rho(x)$ тин баштапкы функцияларынын бири.

(2.4.1) бир тектүү эмес сызыктуу теңдемени интегралдоону төмөнкү методдордун бири менен жүргүзсө болот.

а) каалагандай турактуу чоңдукту вариациялоо методу (Лагранж методу).

(2.4.1) дин чыгарылышын

$$y = c(x)\, exp(\int p(x)\, dx) \qquad (2.4.3)$$

түрдө издейли. (2.4.2) деги c турактуусун $c(x)$ функциясы менен алмаштырганда алынуучу (2.4.3) туюнтмасын (2.4.1) теңдемесине коюп, $c(x)$ белгисиз функциясы үчүн өзгөрмөлөрү ажыралуучу $c'(x) = q(x)\, exp(-\int p(x)\, dx)$ теңдемесин алабыз.

Бул теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$c(x) = \int q(x)\, exp(-\int p(x)\, dx)\, dx + c$$

түрүндө жазылат, мында c – каалагандай турактуу сан, ал эми $\int q(x)\, exp(-\int p(x)\, dx)\, dx$ баштапкы функциялардын бири. $c(x)$ үчүн алынган туюнтманы (2.4.3) формуласына коюп, (2.4.1) теңдемесинин

$$y = exp(\int p(x)\, dx)\, (c + \int q(x)\, exp(-\int p(x)\, dx)\, dx)$$

жалпы чыгарылышын табабыз.

б) Ордуна коюу методу. $y(x) = u(x)\, v(x)$ деп коёлу.

Анда (2.4.1) теңдемеси

$$v\left(\frac{du}{dx}-p(x)u\right)+\left(\frac{dv}{dx}u-q(x)\right)=0 \qquad (2.4.4)$$

түрүнө келет.

$u(x)$ функциясын (2.4.4) теңдемесинин сол жагындагы биринчи кашаа нөлгө барабар болгондой кылып тандап алабыз. Бул үчүн өзгөрмөлөрү ажыралуучу $\frac{du}{dx}-p(x)u=0$ теңдемесин интегралдап, анын кандайдыр бир айрым чыгарылышын. мисалы $u=u_1(x)$ ти тандап алабыз. (2.4.4) теңдемесинин сол жагындагы u нун ордуна $u_1(x)$ функциясын коюп, $v(x)$ функциясына карата өзгөрмөлөрү ажыралуучу $\frac{dv}{dx}u_1(x)-q(x)=0$ теңдемени алабыз.

Акыркы теңдеменин $v=v(x,c)$ жалпы чыгарылышын табабыз. Табылган $u_1(x)$ жана $v(x, c)$ функцияларын көбөйтүп, төмөнкүдөй жалпы чыгарылышты алабыз:

$$y=u_1(x)\,v(x,c).$$

Мисал 2.4.1. $y'+2y=exp(x)$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Каалагандай турактуу чоңдукту вариациялоо методун колдонобуз. Адегенде тиешелүү бир тектүү сызыктуу

$$y'+2y=0.$$

теңдемени карайлы. Анын жалпы чыгарылышы $y=c\,exp(-2x)$ көрүнүшкө ээ болот. Ошондуктан алгачкы теңдеменин жалпы чыгарылышын $y=c(x)\,exp(-2x)$ түрүндө издейбиз. y жана $y'=c'(x)\,e^{-2x}-2\,c(x)\,e^{-2x}$ ди берилген теңдемеге коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$c'(x)\,e^{-2x}-2\,c(x)\,e^{-2x}+2\,c(x)\,e^{-2x}=e^x,\ c'(x)\,e^{-2x}=e^x,$$

$$c(x)=\int e^{3x}dx+c=\frac{1}{3}e^{3x}+c.$$

Мындан теңдеменин

$$y(x)=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+c\right)e^{-2x}=ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$$

жалпы чыгарылышы келип чыгат.

Мисал 2.4.2. $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Ордуна коюу методу менен чыгарабыз.

$y = u\,v$ десек, анда $y' = u'v + u\,v'$. Төмөнкүлөрдү алабыз:

$$u'v + u\,v' + \frac{1}{x} u\,v = \frac{\sin x}{x} \text{ же } u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \sin x.$$

$v' + \frac{v}{x} = 0$ болсун дейли. Мындан $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, демек, $\ln v = -\ln x$, б.а. $v = \frac{1}{x}$. Ошондуктан $u'\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}$, мындан $u' = \sin x$, $u = -\cos x + c$ келип чыгат. Жыйынтыгында $y = u\,v = \frac{1}{x}(-\cos x + c)$ га ээ болобуз.

2^0. Бернулли теңдемеси

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^m \tag{2.4.5}$$

түрүндөгү биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме Бернулли теңдемеси деп аталат, мында $m \neq 0$, $m \neq 1$ ($m = 0$ болсо, (2.4.5) теңдемеси сызыктуу, ал эми $m = 1$ болгондо өзгөрмөлөрү ажыралуучу теңдеме болот).

Сызыктуу теңдемелердей эле, Бернуллинин теңдемесин $y = u\,v$ ордуна коюу жолу менен чыгарсак болот же төмөнкү ордуна коюу менен

$$z = y^{1-m} \tag{2.4.6}$$

сызыктуу теңдемесине алып келебиз. (2.4.5) теңдемесинин эки жагын y^m ге бөлөлү: $y^{-m} y' = p(x)\, y^{1-m} + q(x)$. $z' = (1-m)\, y^{-m} y'$ болгондуктан, акыркы теңдеме

$$z' = (1-m)\, p(x)\, z + (1-m)\, q(x).$$

түрүндө жазылат. Бул сызыктуу теңдеме. Аны чыгарып, кайрадан z тен y ке өтүп, алгачкы теңдеменин чыгарылышын алабыз.

Мындан татаалыраак теңдемени – Риккати теңдемесин карайлы:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x).$$

Бул теңдеме, жалпы учурда, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ ден түзүлгөн элементардуу функциялардын жана интегралдардын жардамы менен интегралданбоочу теңдеме. Бирок, бул теңдеме төмөнкү маанилүү касиетке ээ: эгерде Риккати теңдемесинин кандайдыр бир $y = y_1(x)$ айрым чыгарылышы белгилүү болсо, анда анын жалпы чыгарылышын табуу – сызыктуу теңдемени чыгарууга алып келинет. Чындыгында эле, $z(x) = y(x) - y_1(x)$ жаңы белгисиз функцияны киргизүү менен ал үчүн Бернулли теңдемесин алабыз:

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) + 2q(x)y_1(x)\right]z(x) + q(x)z^2(x) = 0,$$

бул болсо жогоруда айтылган ырастоону далилдейт.

Мисал 2.4.3. $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Бул $m = -1$ болгондогу Бернуллинин теңдемеси. $z = y^2$ деп алсак, $z' = (z / x) - 1$ теңдемесине келебиз. $z' = z / x$ бир тектүү теңдемесин чыгарып, төмөнкүнү табабыз: $z = c\,x$. Мындан туруктуу чоңдукту вариациялоо менен б.а. $z = x\,c(x)$ деп,

$$z = x\ln(c/x)$$

түрдөгү жалпы чыгарылышка же жыйынтыгында $y^2 = x\ln(c/x) = x\,(c_1 - \ln x)$ ке ээ болобуз.

Эскертүү. Төмөнкү сызыктуу эмес теңдемени карайлы: $\left(xp(y) + x^m q(y)\right)\frac{dy}{dx} = r(y)$, $m \neq 0$, $m \neq 1$. Эгерде x ти y тен көз каранды функция деп эсептесек, анда мындан Бернулли теңдемесин алабыз: $r(y)\frac{dx}{dy} = xp(y) + q(y)x^m$.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Берилген дифференциалдык теңдемелерди чыгаргыла:

№ 28. $y' + \lambda y = a,\ \lambda, a = const$.

№ 29. $y' - \frac{2x}{1 + x^2}\,y = 0$.

№ 30. $y' + \frac{1}{x}y = 3x,\ (x \neq 0)$.

№ 31. $xdy + (x^2 - y) \cdot dx = 0.$

№ 32. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

№ 33. $y' - 2xy = 1$.

№ 34. $y' + 2y = e^{3x}$.

№ 35. $y' + y/x = 2\ln x + 1$.

№ 36. $y' + 2y = y^2 e^x$.

№ 37. $y' + \dfrac{x}{1 - x^2} y = x\sqrt{y}$.

№ 38 $(xy + x^2 y^3) y' = 1$.

§2.5. Толук дифференциалдардагы теңдеме Интегралдоочу көбөйтүүчү

1^0. Толук дифференциалдардагы теңдеме

Биринчи тартиптеги

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (2.5.1)$$

дифференциалдык теңдемесин карайлы. Эгерде (2.5.1) дин сол жагы кандайдыр бир $V(x, y)$ функциясынын толук дифференциалы болсо, б.а. $P(x, y) = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, $Q(x, y) = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ барабардыгы орун алса, анда (2.5.1) толук дифференциалдардагы теңдеме деп аталат.

(2.5.1) теңдемеси толук дифференциалдардагы теңдеме болуш үчүн

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2.5.2)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү. Эгерде (2.5.1) - толук дифференциалдардагы теңдеме болсо, анда аны $dV(x, y) = 0$ түрүндө жазууга болот.

Акыркы теңдеменин жалпы интегралы: $V(x, y) = c$, мында c – каалагандай турактуу сан.

V(x,y) функциясын төмөнкү жол менен табуу мүмкүн. $\partial V(x, y) / \partial x = P(x, y)$ барабардыгын *y* ти туруктуу деп эсептеп, *x* боюнча интегралдасак жана бул учурда каалагандай туруктуу *y* ке көз каранды болуусу мүмкүн деп эсептесек, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$V(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \qquad (2.5.3)$$

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + \varphi'(y) = Q(x, y)$$

барабардыгын пайдаланып, $\varphi(y)$ функциясын табабыз жана (2.5.3) кө коюп, *V(x,y)* функциясын алабыз.

Изделүүчү функция *V(x,y)* аддитивдүү туруктууга чейин так аныкталгандыгы көрүнүп турат. Алгачкы теңдеменин жалпы интегралын жазуу үчүн алынган функциялардын түркүмүнүн ичинен бирөөсүн тандап алуу жетиштүү.

Мисал 2.5.1.

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2 y + 4y^3\right)dy = 0$$

теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Мында

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 12xy,$$

(2.5.2) шарты аткарылат жана (2.5.4) теңдемеси толук дифференциалдардагы теңдеме. *V(x,y)* функциясын табалы. $\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ барабардыгын, *y* ти туруктуу деп эсептеп, *x* боюнча интегралдап

$$V(x, y) = \int\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) \qquad (2.5.5)$$

барабардыгын алабыз. $\partial V / \partial y = Q(x, y) = 6x^2 y + 4y^3$ барабардыгына (2.5.5) ти коюп

$$6x^2 y + \varphi'(y) = 6x^2 y + 4y^3, \ \varphi(y) = y^4 - c$$

барабардыктарына ээ болобуз.

Анда (2.5.5) ден (2.5.4) түн жалпы интегралын

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$$

түрүндө алабыз.

2^0. Интегралдоочу көбөйтүүчү

(2.5.1) теңдемеси толук дифференциалдардагы теңдеме болуп саналбаса, бирок (2.5.1) теңдемесинин эки жагын тең көбөйткөндө толук дифференциалдардагы теңдеме

$$\mu (P\,dx + Q\,dy) = 0 \tag{2.5.6}$$

пайда боло турган, б.а.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{2.5.7}$$

шарты аткарыла турган дифференцияллануучу $\mu = \mu(x, y)$ функциясы жашаса, анда бул функция (2.5.1) теңдемесинин <u>интегралдоочу көбөйтүүчүсү</u> деп аталат.

<u>Кыстырма</u>. (2.5.1) теңдемеси толук дифференциалдардагы теңдеме болгон учурда $\mu = 1$ деп эсептөө мүмкүн.

(2.5.7) ден μ интегралдоочу көбөйтүүчү биринчи тартиптеги айрым туундулуу

$$Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{2.5.8}$$

теңдемени канааттандырары келип чыгат.

Эгерде $\mu(x, y)$ акыркы теңдеменин чыгарылышы болсо, анда (2.5.6) теңдемеси толук дифференциалдардагы теңдеме болуп саналат. Жалпы алганда, (2.5.8) теңдемесинин чыгарылышын табуу алгачкы (2.5.1) теңдемесинин чыгарылышын табуудан эч кандай жеңил эмес.

Кээ бир жекече учурларда (2.5.8) теңдемеси жөнөкөйлөнүп, (2.5.1) теңдемеси үчүн интегралдоочу көбөйтүүчүнү табуу жеңилдейт. Бир нече мындай учурларды карайлы:

1) Эгерде (2.5.1) теңдемеси x тен гана көз каранды интегралдоочу көбөйтүүчүгө ээ деп алсак, б.а. $\mu(x, y) = \mu(x)$, анда (2.5.8) ден

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{(\partial P/\partial y) - (\partial Q/\partial x)}{Q}$$

теңдемесин алабыз.

2) Ошондой эле, эгерде (2.5.1) теңдемеси, y өзгөрмөсүн гана көз каранды функция катары каралган интегралдоочу көбөйтүүчүгө ээ болсо, б.а. $\mu(x, y) = \mu(y)$, анда

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{(\partial P/\partial y) - (\partial Q/\partial x)}{-P}$$

болуусу тийиш.

3) Эгерде (2.5.1) теңдемеси

$$\mu(x, y) = \mu_1(w(x, y))$$

түрүндөгү интегралдоочу көбөйтүүчүгө ээ болсо, мында $w(x, y)$ – белгилүү функция, анда

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dw} = \frac{(\partial P/\partial y) - (\partial Q/\partial x)}{Q(\partial w/\partial x) - P(\partial w/\partial y)}. \tag{2.5.9}$$

Мисал 2.5.2.

$$(1 - x^2 y)\, dx + x^2 (y - x)\, dy = 0 \tag{2.5.10}$$

теңдемесин чыгаргыла.

<u>Чыгаруу.</u> Берилген теңдеме x тен гана көз каранды болгон интегралдоочу көбөйтүүчүгө ээ болоорун текшеребиз.

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}$$

ге ээ болобуз.

Демек, интегалдоочу көбөйтүүчүнү $(1/\mu)\,(d\mu\,/\,dx) = -2/x$ теңдемесинен табабыз. Ошондуктан $\mu = exp(\int(2\,/\,x)\,dx) = 1\,/\,x^2$. (2.5.10) теңдемесинин эки жагын $1\,/\,x^2$ ка көбөйтүп, $\left(\dfrac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)\, dy = 0$ дү алабыз:

Бул - толук дифференциалдардагы теңдеме (Текшергиле!). Акыркы теңдемени интегралдап, $y^2 - 2xy - \dfrac{2}{x} = c$ табабыз.

Мисал 2.5.3. Эгерде

$$\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x\right)dx - dy = 0 \qquad (2.5.11)$$

теңдемеси $\mu = \mu_1\,(x^2 - y)$ түрүндөгү интегралдоочу көбөйтүүчүгө ээ болсо, анда аны интегралдагыла.

<u>Чыгаруу.</u> (2.5.9) да $w = x^2 - y$ деп алсак:

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial w}{\partial x} - P\dfrac{\partial w}{\partial y}} = \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}}}{-2x + (\sqrt{x^2 - y} + 2x)} = -\frac{1}{2\left(x^2 - y\right)} = -\frac{1}{2w}$$

га ээ болобуз.

Ошондуктан, $\mu = exp(\int(1/(2\ w))\ dw) = 1/\sqrt{w}\ = 1/\sqrt{(x^2 - y)}$.

(2.5.11) теңдемесинин эки жагын $\mu_1(x)$ ке көбөйтүп жана интегралдап, $x + 2\sqrt{x^2 - y} = c$ ны табабыз. Мында μ_1 функциясы $y = x^2$ ийри сызыгынын чекиттеринде чексизге айланат. $y = x^2$ функциясы (2.5.11) дин чыгарылышы болуп саналат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелерди алдын ала толук дифференциалдардагы теңдемелер экенине ишенип, анан чыгаргыла:

№ 39. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

№ 40. $(10\,xy - 8y + 1)dx + \left(5x^2 - 8x + 3\right)dy = 0$.

№ 41. $\left(y + \dfrac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \dfrac{3}{y^2}\right)dy = 0$.

№ 42. $\left(2x - ye^{-x}\right)dx + e^{-x}\,dy = 0$.

$\mu = \mu_1(x)$ *же* $\mu = \mu_2(y)$ *түрлөрүндөгү интегралдоочу көбөйтүүчүнү тандап алып, төмөнкү теңдемелерди интегралдагыла:*

№ 43. $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)dx + \left(\dfrac{x}{y} - 1\right)dy = 0.$

№ 44. $\left(x^2 + y\right)dx - x\,dy = 0.$

№ 45. $\left(xy^2 + y\right)dx - x\,dy = 0.$

№46. $x^2y^2 + y + \left(x^3y^2 - x\right)y' = 0.$

№47. $\left(x^2 + y^2 + 1\right)dx - 2xy\,dy = 0.$

№48. $\left(y + x^2\right)dy + \left(x - xy\right)dx = 0.$

№ 49. $\left[2y + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right]dx + \left[3y + x + \dfrac{1}{(x+y)^2}\right]dy = 0$.

2.6. Туундусуна карата чечилбеген теңдемелер

Туундусуна карата чечилбеген биринчи тартиптеги жалпы дифференциалдык теңдеме

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \qquad (2.6.1)$$

түрүндө жазылат.

1^0. Өзгөрмөлөрүнө карата чечилген теңдемелер

(2.6.1) теңдемеси y же x ке карата оңой чечилет дейли. Мисалы аны

$$y = f(x, y') \qquad (2.6.2)$$

түрүндө жазууга болсун. Анда ал теңдеме $p = \dfrac{dy}{dx}$ параметрин киргизүү жолу менен интегралданат. $y = f(x, p)$ га ээ болобуз.

Акыркы барабардыктын эки жагынан толук дифференциал алып жана dy ти $p\,dx$ ке алмаштырып

$$p\,dx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dp, \text{ б.а. } P(x,p)\,dx + Q(x,p)\,dp = 0$$

теңдемесин алабыз.

Эгерде бул теңдеменин $x = \phi\,(p,\ c)$ чыгарылышын тапсак, анда алгачкы теңдеменин чыгарылышын $\begin{cases} x = \phi(p, c), \\ y = f(x, p). \end{cases}$ параметрдик түрдө жазууга болот.

Мисал 2.6.1. $y = (y')^2 + xy' - x$ теңдемесин чыгаргыла.

<u>Чыгаруу</u>. $p = y'$ параметрин киргизебиз. Анда

$$y = p^2 + x\,(p - 1) \tag{2.6.3}$$

пайда болот. Бул барабардыкты x боюнча дифференциалдап

$p = 2\,p\,(dp\,/\,dx) + p - 1 + x\,(dp\,/\,dx)$ же $(dp\,/\,dx) = 1\,/\,(2\,p + x)$ барабардыктарын алабыз.

Акыркы теңдемени $(dx\,/\,dp) = 2\,p + x$ жазабыз.

Бул сызыктуу теңдеме, анын жалпы чыгарылышы төмөнкүчө:

$$x = c\,exp(p) + 2\,(p + 1). \tag{2.6.4}$$

(2.6.4) туюнтмасын (2.6.3) формуласына коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$y = c\,exp(p)\,(p - 1) + 3\,p^2 - 2. \tag{2.6.5}$$

(2.6.4) жана (2.6.5) системалары алгачкы теңдеменин жалпы чыгарылышынын параметрдик түрүн берет.

(2.6.2) түрүндөгү теңдеменин айрым учуру болуп саналган <u>Лагранж теңдемеси</u>

$$y = xf(y') + \varphi(y') \tag{2.6.6}$$

түрүндө берилет. Эгерде $f(y') = y'$ болсо, <u>Клеро теңдемеси</u> деп аталат. $p = y'$ параметрин киргизүү аркылуу (2.6.6) теңдемеси Лагранждын жалпы теңдемеси учурунда $y = xf(p) + \varphi(p)$ түрүнө жана Клеронун теңдемеси учурунда $y = xp + \varphi(p)$ түрүнө келтирилет. Андан башка Лагранж теңдемеси өзгөчө чыгарылышка ээ: $y = xf(p_0) + \varphi(p_0)$, мында p_0 чоңдугу $f(p) = p$ теңдемесинин каалаган тамыры.

Клеро теңдемеси

$$y = cx + \varphi(c) \tag{2.6.7}$$

жалпы чыгарылышка жана

$$x = -\varphi'(p),\ y = -\varphi'(p)p + \varphi(p) \tag{2.6.8}$$

өзгөчө чыгарылышка ээ.

Ошентип, төмөнкү практикалык эрежени келтирсек болот. Клеро теңдемесинде y' символун c га алмаштырып, түз эле (2.6.7) нин жалпы чыгарылышын алабыз. Аны c боюнча дифференциалдап жана алынган эки теңдемеден турган системадан c ны чыгарып салып (толук чыгарылышынан жана дифференциялдоонун жыйынтыгынан) (2.6.8) дин өзгөчө чыгарылышын алабыз.

Мисал 2.6.2.

$$y = 2xy' - y'^2 \qquad (2.6.9)$$

Лагранж теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Жогоруда көрсөтүлгөн методго таянып төмөнкүнү алабыз: $y' = p$, $y = 2xp - p^2$, $dy = y'dx$,

$2p\,dx + (2x-2p)\,dp = p\,dx$, $p\,dx + (2x-2p)dp = 0$, $dx/p + (2/p)\,x = 2$,

$x = c/p^2 + (2/3)p$, $y = 2c/p + p^2/3$. $p = 0$ ду $y = 2xp - p^2$ барабардыгына коюп, $y = 0$ ду табабыз. Бул (2.6.9) теңдемесинин чыгарылышы, болгондо да өзгөчө чыгарылышы.

Мисал 2.6.3.

$$y = xy' + y'^2 \qquad (2.6.10)$$

Клеронун теңдемесин интегралдагыла.

Чыгаруу. y'ти c га алмаштырып

$$y = cx + c^2 \qquad (2.6.11)$$

жалпы чыгарылышты алабыз. Теңдеменин өзгөчө чыгарылышын, б.а. (2.6.11) ийри сызыктар түркүмүнүн жандашуучусун табабыз, б.а. $\begin{cases} y = cx + c^2 \\ 0 = x + 2c. \end{cases}$

c параметрин чыгарып салып, төмөнкүгө ээ болобуз: $y = -x^2/4$. Бул (2.6.11) түркүмүнүн жандашуучусу жана ошондуктан (2.6.10) теңдемесинин өзгөчө чыгарылышы болот.

Мындан ары толук эмес теңдемелерди карайбыз.

2^0. y' ти гана камтыган теңдеме:

$$F(y') = 0. \qquad (2.6.12)$$

Бул теңдеме $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right) = 0$ жалпы интегралына ээ болот.

Мисал 2.6.4. $exp(y') + y' = 1$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу: Бул теңдеме (2.6.12) түрүндөгү теңдеме. Анын жалпы интегралы төмөндөгүдөй болот:

$$exp((y - c) / x) + (y - c) / x = 1.$$

3^0. Изделүүчү функцияны камтыбаган теңдеме:

$$F(x, y') = 0 \ . \qquad (2.6.13)$$

Эки учурду карап көрөлү:

а) (2.6.13) теңдемеси y' ке карата чыгарылган теңдеме. Теңдеме y' тин маанисин m аныктасын дейли:

$$y' = f_k(x), \ (k = 1, ..., m),$$

мындан төмөнкүнү алабыз:

$$y = \int f_k(x)\,dx + c, \ (k = ,1, ..., m).$$

б) (2.6.13) теңдемеси y' ке карата (элементардык функцияларда) чыгарылбасын, бирок $x = \varphi(t), \ \ y' = \psi(t)$ параметрдик көрүнүштү бере алсын. Бул учурда жалпы чыгарылышты параметрдик формада таба алабыз:

$$dy = y'\,dx,$$

$$dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + c.$$

Буларга $x = \varphi(t)$ ты кошуп, (2.6.13) теңдемесинин жалпы чыгарылышын параметрдик формада алабыз:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c. \end{cases}$$

4^0. Көз каранды эмес өзгөрмөнү камтыбаган теңдеме:

$$F(y, y') = 0. \qquad (2.6.14)$$

Бул жерде да эки учур орун алышы мүмкүн.

а) (2.6.14) теңдемеси y' ке карата чыгарылган: $y' = f_k(y)$, $(k = 1, ..., m)$.

Анда $\int \frac{dy}{f_k(y)} = x + c,\ (k = 1,...,m).$

б) (2.6.14) теңдемеси параметрдик көрүнүштү бере алат:

$$y = \varphi(t),\ y' = \psi(t).$$

Анда $dy = y'\,dx,\ \varphi'(t)\,dt = \varphi(t)\,dx,\ dx = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$, ошондуктан $\begin{cases} y = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + c \\ y = \varphi(t). \end{cases}$

Мисал 2.6.5. $exp(y') + y' = x$ теңдемени интегралдагыла:

(2.6.15)

Чыгаруу. Бул (2.6.13) түрүндөгү теңдеме, бирок x ке карата чыгарылган. Мындай учурда, параметрдин ордуна адатта y' ти кабыл алышат, б.а. $y' = t$ десек, анда $x = e^t + t$.

Жыйынтыгында (2.6.15) теңдемесинин параметрдик көрүнүшүн төмөнкү түрдө алабыз:

$$\begin{cases} x = e^t + t \\ y' = t. \end{cases}$$

Андан кийин

$dy = y'dx = t(e^t+1)dt,\ y = \int t(e^t+1)dt + c = e^t(t-1) + t^2/2 + c.$

Демек, $\begin{cases} x = e^t + t \\ y = e^t(t-1) + \dfrac{t^2}{2} + c. \end{cases}$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелерди чыгаргыла:

№50. $y = (y')^2 + 4\,(y')^3$; №51. $y = y'\sqrt{1 + (y')^2}$;

№52. $x = (y')^3 - y' + 2;$ №53. $x = y' + \sin y'$;

№54. $2y' + (y')^2 - x = 0;$ №55. $x = y'\cos y'$;

№56. $y = x(y')^2 + y';$ №57. $2yy' = x((y')^2 + 4);$

№58. $y = xy' - (y')^2$; №59. $y = -xy' + (y')^2$;

№60. $y = xy' + y' + e^{y'}$.

§ 2.7. Дифференциалдык теңдемелердин өзгөчө чыгарылыштары

Эгерде
$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.7.1}$$
теңдемесинин чыгарылышынын ар бир чекитинде анын жалгыздык касиети бузулса, б.а. анын ар бир (x_0, y_0) чекити аркылуу бул чыгарылыштан башка, (x_0, y_0) чекитинде $y = \varphi(x)$ чыгарылышыныкындай эле жанымага ээ болгон, бирок аны менен (x_0, y_0) дун жетишээрлик кичине аймагында дал келбеген башка чыгарылыш да өтсө, анда $y = \varphi(x)$ өзгөчө деп аталат. Өзгөчө чыгарылыштын графигин (2.7.1) теңдемесинин <u>өзгөчө интегралдык ийри сызыгы</u> деп атайбыз.

Эгерде төмөнкү теңдемени карасак:
$$y' = f(x, y(x)), \tag{2.7.2}$$
анда Пикардын теоремасы (**§ 2.1**ди карагыла) - өзгөчө чыгарылыштардын табылбастыгынын жетиштүү шарттарын берет. Демек, өзгөчө чыгарылыш Липшицтин шарты аткарылбаган чекиттерде жашоосу мүмкүн. Ал эми Липшиц шарты $\partial f / \partial y$ чексизге барабар болгон же жашабаган чекиттерде аткарылбайт.

Мисал 2.7.1. Төмөнкү теңдемени карайлы:
$$y' = y^{2/3} \tag{2.7.3}$$

<u>Чыгаруу.</u> Бул теңдеменин оң жагы y тин бардык маанилеринде үзгүлтүксүз жана аныкталган. Бирок $y = 0$ маанисинде $\frac{d(y^{2/3})}{dy} = \frac{2}{3} y^{-1/3}$ чектелбеген. (2.7.3) теңдемесинин өзгөрмөлөрүн ажыратып жана интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:
$$\int y^{-2/3} dy = \int dx + c, \; 3y^{1/3} = x + c.$$

Мындан $27y = (x + c)^3$. Бул кубдук парабола (2.7.3) теңдемесинин жалпы чыгарылышы болуп саналат. Ошондой эле $y = 0$ дагы (2.7.3) теңдемесинин чыгарылышы экендигин көрүүгө болот. Демек, Ox огу аркылуу эки чыгарылыш өтөт: $y = 0$ жана $27y = (x + c)^3$. Ошондуктан $y = 0$ (2.7.3) теңдемесинин өзгөчө чыгарылышы болот. Демек, дифференциалдык теңдеменин өзгөчө чыгарылышын табуу үчүн $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$ болгон же ал жашабаган чекиттердин жайланыш ордун аныктоо зарыл.

Туундусуна карата чечилбеген (2.7.1) теңдемеси үчүн Липшиц шарты

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \tag{2.7.4}$$

болгон чекиттерде чынында да аткарылбайт. Акыркы барабардык (2.7.1) теңдемесинин y' ти $y' = f(x, y)$, деп чыгаргандан жана да айкын эмес функциянын туундусун табуунун

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y'}, \text{ мында } \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

формуласынан келип чыгат. Туундусуна карата чечилбеген (2.7.1) теңдемесинин өзгөчө чыгарылышын табуу үчүн (2.7.1) жана (2.7.4) теңдемелеринен y' ти мүмкүн болсо чыгарып салуу керек.

$$\Psi(x, y) = 0 \tag{2.7.5}$$

Чыгарып салгандан кийин алынган теңдемесин - (2.7.1) теңдемесинин p <u>– дискриминанты</u>, ал эми (2.7.5) теңдемесинен аныкталган ийри сызык p <u>– дискриминанттык ийри сызык</u> деп аталат (кыскача ПДИ).

Көбүнчө ПДИ бир нече тармактарга ажырайт. Анда анын ар бир тармагы өз өзүнчө (2.7.1)дин чыгарылышы болоорун аныкташ керек. Эгерде чыгарылыш болсо, анда ал өзгөчө чыгарылыш экенин, б.а. анын ар бир чекитинде жалгыздык бузулаарын аныкташ керек.

Мисал 2.7.2.

$$(y')^2 - xy' + y = 0 \tag{2.7.6}$$

теңдеменин өзгөчө чыгарылыштарын тапкыла.

Чыгаруу. а) ПДИ ни табабыз. Бул учурда $F(x,y,y')=(y')^2-xy+y$ жана (2.7.4) шарты төмөнкү түрдө жазылат: $\frac{dF}{dy'}=2y'-x=0$, мында $y'=\frac{x}{2}$. Бул туюнтманы (2.7.6) теңдемесине y' тин ордуна коюп, төмөнкүгө ээ болобуз

$$y(x)=\frac{x^2}{4}. \tag{2.7.7}$$

(2.7.7) ийри сызыгы (2.7.6) теңдемесинин ПДИ си: ал бир тармактан–параболадан турат.

б) ПДИ (2.7.6) теңдемесинин чыгарылышы болоорун текшерели. (2.7.7) ни жана анын туундусун (2.7.6) га коюп, (2.7.7) функциясы (2.7.6) нын чыгарылышы экенине ишенебиз.

в) (2.7.7) чыгарылышы (2.7.6) нын өзгөчө чыгарылышы экенин текшеребиз. Бул үчүн (2.7.6) нын жалпы чыгарылышын табабыз. (2.7.6) ны $y=xy'-(y')^2$ түрдө жазып алабыз. Бул Клеронун теңдемеси. Анын жалпы чыгарылышы

$$y=cx-c^2. \tag{2.7.8}$$

$y=y_1(x)$ жана $y=y_2(x)$ эки ийри сызыктын абциссасы $x=x_0$ чекитиндеги жанышуу шарттарын төмөнкүчө жазабыз:

$$y_1(x_0)=y_2(x_0),\ y_1'(x_0)=y_2'(x_0). \tag{2.7.9}$$

Биринчи барабардык - ийри сызыктын ординаталарынын дал келүүсүн, ал эми экинчи барабардык абсциссасы $x=x_0$ чекитинде ушул ийри сызыктардын жанымаларынын бурчтук коэффициенттеринин дал келүүсүн туюнтат. $y_1=x^2/4$, $y_2=c\,x-c^2$ деп, (2.7.9) шарты

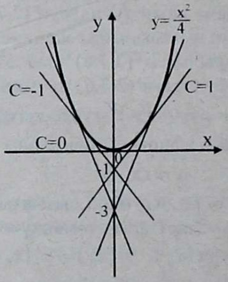
$$\frac{x_0^2}{4}=cx_0-c^2,\ \frac{x_0}{2}=c \tag{2.7.10}$$

түрүндө болоорун табабыз.

(2.7.10) барабардыктардын биринчисине $c=\frac{x_0^2}{2}$ коюп, төмөнкүгө ээ болобуз: $\frac{x_0^2}{4}=\frac{x_0^2}{2}-\frac{x_0^2}{4}$, $\frac{x_0^2}{4}=\frac{x_0^2}{4}$, б.а. $c=\frac{x_0^2}{2}$ учурунда x_0 эркин чекиттин абциссасы болгондуктан, биринчи барабардык теңдеш түрдө аткарылат.

Ошентип, (2.7.7) ийри сызыгынын ар бир чекитинде, аны (2.7.9) башка түркүмүнүн ийри сызыгы тагыраак айтканда, $c=\frac{x_0}{2}$ барабардыгы аткарылган ийри сызык жанып өтөт. Демек, $y=\frac{x^2}{4}$ (2.7.6) нын өзгөчө чыгарылышы.

г) <u>Геометриялык талдоо</u>. (2.7.6) теңдемесинин жалпы чыгарылышы (2.7.8) түз сызыктардын түркүмү, ал эми (2.7.7) өзгөчө чыгарылышы бул түз сызыктардын түркүмүнүн жандашуучусу болуп саналат (2-сүрөт.).



2-сүрөт

Адатта, (2.7.1) чыгарылыштарынын көптүгү төмөнкү бир параметрдик түркүм түрүндө жазылышы мүмкүн

$$\varphi\ (x, y, c)=0, \qquad (2.7.11)$$

мында c турактуусунун маанилери ар кандай интегралдык ийри сызыктарды аныктайт. Эгерде (2.7.11) функциялар түркүмүнүн жандашуучусу $y=y(x)$ болсо, анда бул жандашуучу дагы (2.7.1) теңдемесинин интегралдык ийри сызыгы болот жана жандашуучусунун ар бир чекитинде жандашуучу менен жалпы жанымага ээ болгон интегралдык ийри сызыктын (2.7.11) түркүмү өтөт. Ошентип (2.7.11) интегралдык ийри сызык түркүмүнүн жандашуучусу (2.7.1) дин өзгөчө чыгарылышы болот. Математикалык анализ курсунан белгилүү болгондой бир параметрдик түркүмдүн жандашуучусу c параметрин төмөнкү катыштардан чыгарып салуу жолу менен табылышы мүмкүн

$$\varphi(x, y, c) = 0\,,\ \frac{\partial \varphi}{\partial c}(x, y, c) = 0\,.$$

Мындан пайда болгон $\Psi(x, y) = 0$ ийри сызыктын c –дискриминанттуу ийри сызыгы деп аталат. Жыйынтыгында белгилеп кетели, (2.7.11) түркүмдүн жандашуучусунун ошону менен бирге (2.7.1) теңдемесининин өзгөчө чыгарылышынын жашоо шарты болуп: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ шартын канааттандырган $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ жана $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ чектелген айрым туундулардын жашашы саналат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин өзгөчө чыгарылыштарын тапкыла:

№ 61. $xy' + (y')^2 - y = 0$;

№ 62. $xy' - 2yy' + 4x = 0$, $x > 0$, *анын жалпы интегралы* $x^2 = c(y - c)$ *экенин билип туруп;*

№ 63. $(y')^2 - 4y = 0$.

§ 2.8. Изогоналдуу траекториялар үчүн дифференциалдык теңдемелер

1^0. Декарттык координаталгр

Аныктама.

$$\phi\ (x, y, a) = 0 \qquad (2.8.1)$$

(a – бурчтук параметр) теңдемеси менен аныкталган L_1 сызыктардын бир параметрдүү түркүмүнүн изогоналдуу траекториясы деп, берилген биринчи түркүмдүн сызыктарын бир эле турактуу a бурчу менен кесип өткөн экинчи L_2 сызыктардын түркүмүн айтабыз. Эгерде $\alpha = \pi / 2$ болсо, анда изогоналдуу траектория ортогоналдуу деп аталат.

(2.8.1) түркүмдүн изогоналдуу (ортогоналдуу) траекториялары кандайдыр бир дифференциалдык теңдемелерди канааттандырышат. Бул теңдемелерди табуу үчүн төмөнкүлөр зарыл:

а) (2.8.1) түркүмдүн дифференциалдык теңдемесин түзүү;

б) пайда болгон теңдемеде: $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(k = tg\alpha)$ болсо, анда y' ти $\frac{y'-k}{1+ky}$ ке, же $\alpha = \frac{\pi}{2}$ болсо, $-\frac{1}{y}$ ке алмаштыруу;

2^0. Полярдык координаталар

Эгерде ийри сызыктардын

$$\phi\left(r, \theta, a\right) = 0 \qquad (2.8.2)$$

түркүмү полярдык (r, θ) координаталарда берилсе, анда изогоналдуу (ортогоналдуу траекториялар түркүмүнүн дифференциалдык теңдемесин табуу үчүн төмөнкүлөр керек:

а) (2.8.2) теңдемесин түзүү;

б) алынган теңдемеде $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(k = tg\alpha)$ болсо, $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}$ ди

$((1+k\,r/\dot{r}\,)\,/\,(\,r/\dot{r}\,-k))r$ га, же

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ болсо, $-\frac{r^2}{\dot{r}}$ ге алмаштыруу;

Мисал 2.8.1. $y = ax^3$ кубдук параболалар түркүмүнүн ортогоналдуу траекториясын тапкыла.

Чыгаруу. $\begin{cases} y = ax^3 \\ y' = 3ax^2 \end{cases}$ системадан a ны чыгарып салып, берилген түркүмдүн дифференциалдык теңдемесин табабыз. $y' = 3y / x$ ти алабыз. Ортогоналдуу траектория түркүмүнүн дифференциалдык теңдемеси: $y' = -x/(3y)$. Анын жалпы интегралы $x^2 + 3y^2 = c^2$ ортогоналдуу траекториялардын (элементтердин) түркүмүнүн теңдемеси болуп саналат. Мында бул - эллипстер түркүмү.

Мисал 2.8.2. $r = 2\ a\ \sin\ \theta$ түркүмүнүн ортогоналдуу траекторияларын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Адегенде бул түркүмдүн

$$\begin{cases} r = 2a\sin\theta, \\ \dot{r} = 2a\cos\theta \end{cases}$$

дифференциалдык теңдемесин табабыз. Бул системадан a ны чыгарып салып, $\dot{r} = r\ ctg\theta$ ны алабыз. $\dot{r}$ ди $-\dfrac{r^2}{\dot{r}}$ ге алмаштырабыз. $-\dfrac{r^2}{\dot{r}} = r\ ctg\theta$ же $\dfrac{\dot{r}}{r} = -tg\theta$ ны алабыз. Бул теңдемени интегралдап, изделүүчү ортогоналдуу траекториялардын $r = 2\ c\ cos\,\theta$ түркүмүн табабыз.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№ 64. *Борбору координаталар башталышы болгон* $x^2 + y^2 = R^2$ *айланалар түркүмүнүн ортогоналдуу траекториясын тапкыла.*

№ 65. $y = ax^2$ *параболалар түркүмүн ортогоналдуу траекториясын тапкыла.*

№ 66. *Координаталар башталышынан* $\frac{\pi}{4}$ *бурчу астында чыккан жарым түз сызыктардын баарын кесип өткөн ийри сызыктарды тапкыла (полярдык координаталарды колдонгула).*

№ 67. $r = ae^{\theta}$ *логарифмдик спиралдар түркүмүнүн бардык ийри сызыктарын* $\frac{\pi}{4}$ *бурчу астында кесип өткөн ийри сызыктарды тапкыла.*

№ 68. $xy = a$ *гиперболалар түркүмүнүн сызыктарына ортогоналдуу болгон сызыктарды тапкыла.*

№ 69. *Потенциалга ээ болгон күчтөр түзгөн талаанын күч сызыктары деңгээл сызыктарынын түркүмүнө ортогоналдуу траектория болуп саналарын далилдегиле.*

Көрсөтмө: Эгерде F күчтөрдүн координаталар октoруна болгон проекциялары V дан алынган айрым туундуларга $F_x = \dfrac{\partial V}{\partial x}, F_y = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ *тиешелүү түрдө барабар болушса, анда күч талаасы* $V = V(x,\ y)$ *потенциалга ээ болгон F күчтөрү аркылуу түзүлгөн деп айтышат (§ 2.5 ди карагыла).* $V = c$ *сызыгы деңгээлдер сызыгы деп аталат. Жанышуу чекитинде күчтүн багыты менен жанымалары дал келген сызыктар күч сызыктары деп аталышат.*

№ 70. $V = x^2 + y^2$ *потенциалына ээ болгон күчтөр түзгөн талаанын күч сызыктарын тапкыла.*

№ 71. *Ошол эле маселе, эгерде* $V = \dfrac{x^2}{2} + y^2$ *болсо.*

III Глава. Экинчи жана жогорку тартиптеги дифференциалдык тендемелер

§ 3.1. Экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер

Тендеменин сол жагына белгисиз функциянын экинчи туундусу кирген $F(x,y,y',y'')=0$ түрүндөгү дифференциалдык теңдемени караганга өтөлү. Мындай тендемер экинчи тартиптеги дифференциалдык тендемелер деп аталат.

Адатта, экинчи туундусуна карата чечилген

$$y''=f(x,y,y'). \tag{3.1.1}$$

тендемелер каралат. (3.1.1) теңдемеси үчүн төмөнкү натыйжа туура.

Экинчи тартиптеги (3.1.1) дифференциалдык теңдемеси $y=\varphi(x,c_1,c_2)$ формуласы менен берилген, эки каалагандай турактууну камтыган чыгарылыштардын чексиз көптүгүнө ээ. Бул чыгарылыштардын жыйындысы жалпы чыгарылыш деп аталат.

Теңдеменин айрым чыгарылышы

$$y|_{x=x_0}=y_0 \text{ жана } y'|_{x=x_0}=y'_0 \tag{3.1.2}$$

баштапкы шарттардын жардамы менен табылат.

Мисал 3.1.1. $y''=x^2$ теңдемесинин айрым чыгарылышын $y|_{x=1}=1,\quad y'|_{x=1}=2$ баштапкы шарттары менен бирге тапкыла.

Чыгаруу. **1.2.2**. мисалына окшоштуруп чыгарып, $y=x^4/12+c_1x+c_2$ ге ээ болобуз. Баштапкы шарттарды коюп, төмөнкүнү алабыз:

$1=1/12+c_1+c_2, 2+1/3+c_1$, мындан $c_1=5/3$ жана $c_2=-9/12$.

Демек, $y=x^4/12+(5/3)x-9/12$ түрүндөгү функция изделген айрым чыгарылыш болот.

Баштапкы шарттардын геометриялык мааниси мындайча: интегралдык ийри сызык өткөн (x_0, y_0) чекиттен башка дагы бул ийри сызыкка (y'_0) бурчтук коэффициентти да беребиз. Экинчи тартиптеги теңдеменин жалпы чыгарылышы эки турактуудан көз каранды болгондуктан, берилген чекиттен интегралдык ийри сызыктардын чексиз көптүгү өтөт, бирок булардын бири гана берилген бурчтук коэффициентке ээ болот. Эгерде жогоруда каралган мисалда, жалпы чыгарылышта $c_2 = 11/12 - c_1$ деп алсак, анда $y = x^2/12 + c_1 x + (11/12 - c_1)$ функциясынын графиги c_1 дин каалагандай мааниси үчүн берилген $(1,1)$ чекити аркылуу өтөөрүн оңой эле көрсөтүүгө болот. Бардык ийри сызыктардын ичинен бурчтук коэффициенти 2 ге барабар болгонун тандасак, изделген айрым чыгарылышка келебиз.

<u>Теорема 3.1.1 (Пеано)</u>. Эгерде $f(x, y, y')$ функциясы (x_0, y_0, y_0') чекиттеринин аймагында үзгүлтүксүз болсо, анда (3.1.1) теңдемеси $x = x_0$ чекитинин аймагында $y(x_0) = y_0$ жана $y'(x_0) = y_0'$ шарттарын канааттандырган $y = y(x)$ чыгарылышына ээ.

<u>Теорема 3.1.2 (Пикар)</u>. Эгерде (x_0, y_0, y_0') баштапкы маанилеринин аймагында f функциясы өзүнүн бардык аргументтери боюнча үзгүлтүксүз функция болсо жана Липшицтин

$$\left|f(x,\bar{y},\bar{y}') - f(x,y,y')\right| \le L\left(\left|\bar{y} - y\right| + \left|\bar{y}' - y'\right|\right)$$

шартын канааттандырса, анда (3.1.1) теңдемесинин (3.1.2) шартын канааттандырган жалгыз чыгарылышы жашайт. Липщиц шарты андан катуураак шарт менен б.а. ошол эле аймакта функциянын 1-тартиптеги чектелген айрым туундуларынын: $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial y'$ жашоо шарты менен алмаштырылышы мүмкүн.

Теореманын далилдөөсү **2.1.2**. теоремасынын далилдენгенине окшош жүргүзүлөт.

Келтирилген теореманы пайдаланып, маселен, $y'' = 2y' + y/x$ теңдемеси $y|_{x=1} = 1$ жана $y'|_{x=1} = -1$ баштапкы шарттарында жалгыз чыгарылышка ээ деп дароо эле айтууга болот. Мында бул чыгарылышты кандай жол менен табууга болот деген суроо ачык бойдон калат. Эгерде $x=0$ деген баштапкы шартты ушул эле теңдемеге койсок, анда жашоо теоремасы эч кандай жыйынтык чыгарууга мүмкүндүк бербейт, анткени теңдеменин оң жагы бул баштапкы шарттарда аныкталган эмес.

Биринчи тартиптеги теңдемелердегидей эле, баштапкы шарттар боюнча айрым чыгарылышты табуу маселеси - <u>Коши маселеси</u> деп аталат.

Мисал 3.1.2. $y'' = y'\sqrt{y}\,/\,x$ теңдемесинин чыгарылышынын локалдуу жашаган жана жалгыз болгон аймагын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> $f(x,\ y,\ y') = y'\sqrt{y}\,/\,x$ функциясы жана анын $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y'}{2x\sqrt{y}}$ айрым туундусу $x \neq 0$, $y>0$ болгондо үзгүлтүксүз; $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$ айрым туундусу $x \neq 0$, $y>0$ болгондо үзгүлтүксүз. Демек, изделүүчү аймак: $\{x \neq 0\ ,\ y > 0\}$.

Экинчи тартиптеги теңдеме үчүн айрым чыгарылышты чектик шарттарды берүү менен да тапса болот. Мында функциянын маанилери эки ар түрдүү чекитте $y|_{x\ x_1} = y_1,\ y|_{x\ x_2} = y$ берилет.

Мындай типтеги жалпы маселелер айрым туундулуу дифференциалдык теңдемелерди изилдөөдө (математикалык физика теңдемелери) кездешет.

Мисал 3.1.3. $y'' = x^2$ теңдемесинин чыгарылышын $y|_{x\ 1} = 0,\ y|_{x\ 2} = 0$ чектик шарттарында тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Жогоруда теңдеменин жалпы чыгарылышы $y=x^4/4+c_1x+c_2$ түрүндө болоору көрсөтүлгөн. Берилген шарттарды жалпы чыгарылышка коюп, c_1 жана c_2 каалагандай турактууларды табуу үчүн эки теңдеменин

$$1\,/\,12 + c_1 + c_2 = 0,\quad 4\,/\,3 + 2\,c_1 + c_2 = 0$$

системасын түзөбүз.

Мындан $c_1 = -15\,/12$, $c_2 = 7\,/6$, жана айрым чыгарылыш:

$$y = x^4\,/\,12 - 15\,/\,12\,x + 7\,/\,6.$$

Көрсөтүлгөн мисалда берилген чектик шарттарды канааттандырган жалгыз айрым чыгарылыш табылды. 2-тартиптеги теңдемелер - чектик шарттарды канааттандырган чыгарылышка ээ болбой калышы да мүмкүн, же башка кээ бир учурда мындай чыгарылыштын чексиз көптүгүнө ээ болушу мүмкүн (мындай мисал кийинчерээк көрсөтүлөт (мисал **3.8.4**, **§3.8**)). Ушул айтылгандар чектик шарттардын берилиши, баштапкы шарттардын берилишинен түп тамырынан бери айырмаланаарын көрсөтөт. Эгерде баштапкы шарттар берилсе, анда жашоо жана жалгыздык теоремасы (анын колдонулушу мүмкүн болгон учурда) коюлган маселе жалгыз чыгарылышка ээ болорун түз эле гарантиялайт. Эгерде чектик шарттар берилсе, анда жалпы чыгарылышын тапкандан кийин гана чектик маселе чыгарылышка ээ болорун, болсо канча экендигин чыныгытай алабыз.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү теңдемелердин чыгарылышы кандай аймакта локалдуу жашайт жана жалгыз:

№ 72. $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$.

№ 73. $y'' = y' \ln y'$.

Төмөндө берилген туюнтмалар, аларга кирген параметрлердин (c_1 жана c_2) каалагандай чыныгы маанилеринде тиешелүү дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышын аныктаарын көрсөткүлө:

№ 74. $y = x\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \cos x + c_1 x + c_2$; $xy'' = \sin x$.

№ 75. $c_1 y = \sin(c_1 x + c_2)$; $yy'' + 1 = (y')^2$.

Төмөндө берилген функциялар тиешелүү дифференциалдык теңдемелердин айрым чыгарылыштары болоорун көрсөткүлө:

№ 76. $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right)$; $1 + (y')^2 = 2yy''$,

№ 77. $y = e^x$; $y^2 + (y')^2 = 2yy''$.

§ 3.2. Экинчи тартиптеги теңдемелердин айрым учурлары

Эгерде (3.1.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы (жалпы интегралы) берилген функциялардан алынган интегралдар жана элементардык функциялар түрүндө көрсөтүлсө, анда теңдеме квадратурада интегралданган деп айтылат. Экинчи тартиптеги теңдемени көпчүлүк учурларда биринчи тартиптеги теңдемеге алып келүү жолу менен (мындай теңдеменин чыгарылышын II главадан карагыла) же чыгарууда пайда болгон интегралдарды табуу жолу менен квадратурада интегралдаганга мүмкүн болот. Элементардык функцияларда же квадратурада интегралдана турган (3.1.1) теңдемесинин айрым учурларын карайбыз:

1^0. Теңдеменин оң жагы y и y' ти камтыбайт:

$$y'' = f(x). \qquad (3.2.1)$$

$y'' = (y')'$ болгондуктан, $y' = \int f(x)dx + c_1$,

$$y = \int\left[\int f(x)dx\right]dx + c_1 x + c_2,$$

мында c_1 жана c_2 – каалагандай турактуу сан. **3.1.1** мисалында мындай теңдеменин айрым учуру каралган.

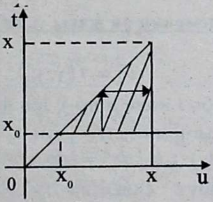
(3.2.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түргө ээ:

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt\,du + y'_0\cdot(x - x_0) + y_0, \qquad (3.2.2)$$

мында x_0, y_0, y'_0 – каалагандай сандар.

(3.2.2) деги кош интегралды өзгөртөбүз. Муну кайталанган интеграл катары

$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{u} f(t)dt\;du = \int_{x_0}^{x}du\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt$ карайбыз жана үч бурчтукта интегралдоонун тартибин Дирихленин формуласы боюнча алмаштырабыз (3-сүрөт.).



3-сүрөт

Анда

$$\int_{x_0}^{x}du\int_{x_0}^{u} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\int_{t}^{x}du = \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)dt.$$

Бул интегралды эсептөөдө x кыймылсыз чекит катары каралып жатканы көрүнүп турат. Анда (3.2.2) төмөнкү түрдү алат:

$$y = \int_{x_0}^{x}(x-t)f(t)dt + (x - x_0)y'_0 + y_0.$$

2^0. Теңдеменин оң жагы y ти камтыбайт:

$$y'' = f(x, y'). \tag{3.2.3}$$

$y' = z$ деп алабыз. Анда $y'' = z'$ болот жана (3.2.3) теңдемеси (2.1.1) түрүндөгү z ке карата биринчи тартиптеги теңдемеге айланат:

$$z' = f(x, z).$$

Эгерде $z = \varphi(x, c_1)$ теңдемесинин чыгарылышын тапсак, анда изделген чыгарылышты $y' = z$ барабардыгын интегралдоодон алабыз, б.а. $y = \int \varphi(x, c_1)\,dx + c_2$.

Мисал 3.2.1. $y'' + y'/x = x$ теңдемесин чыгаргыла.

<u>Чыгаруу.</u> $y' = z$, $y'' = z'$ деп эсептеп, сызыктуу биринчи тартиптеги $z' + z/x = x$ теңдемесине келебиз. Аны чыгарып, төмөнкүнү табабыз: $z = x^2/3 + c_1 x^{-1}$. Анда $y' = x^2/3 + c_1 x^{-1}$ жана $y = x^3/9 + c_1 \ln x + c_2$ болот.

3^0. Теңдеменин оң жагы x ти камтыбайт:

$$y'' = f(y, y'). \tag{3.2.4}$$

$y' = p$ деп алабыз жана p ны y тен функция деп эсептейбиз. x ти кароодон чыгарып салуу үчүн

$$dp/dx = (dp/dy)\cdot(dy/dx) = (dp/dy)y' = (dp/dy)p$$

өзгөртүүнү жүргүзөбүз. Ошентип $y'' = (dp/dy)p$. Биздин өзгөртүүлөрдү (3.2.4) теңдемесине койсок, $p(dp/dy) = f(y, p)$ ны алабыз, б.а. y тен функция катары p га карата биринчи тартиптеги теңдемени алдык. Эгерде анын $p = \varphi(y, c_1)$ чыгарылышын тапсак, анда изделүүчү чыгарылышты өзгөрмөлөрү ажыралуучу төмөнкү теңдемеден алабыз:

$$dy/dx = p = \varphi(y, c_1),\ dy/\varphi(y, c_1) = dx,\ \int dy/\varphi(y, c_1) = x + c_2.$$

Мисал 3.2.2. $2yy''+(y')^2=0$ теңдемени чыгаргыла.

Чыгаруу. $y'=p,\ \ y''=(dp/dy)p$ десек, төмөнкүгө ээ болобуз: $2yp(dp/dy)+p^2=0$,

$$dp/p=-dy/(2y),\ ln\,p=(-1/2)ln\,y+ln\,c,\ \ p=c_1/\sqrt{y}\,.$$

Эми $dy/dx=c_1/\sqrt{y}$ теңдемесинен y ти аныктап, изделген

$$y^{\frac{3}{2}}=c_1x+c_2 \text{ же } y=(c_1x+c_2)^{\frac{2}{3}}$$

чыгарылышка келебиз. (p га кыскартканда теңдеменин $p\equiv y'=0$ чыгарылышын жоготушубуз мүмкүн, б.а. $y=const$, бирок бул жерде ал жоголгон жок).

Эскертүү. Эгерде (3.1.1) теңдемеси $y''=f(y')$ түргө ээ, б.а. ал бир убакта $\mathbf{2^0}$ жана $\mathbf{3^0}$ тибине кирсе, анда теңдемени чыгарууга кайсынысы ыңгайлуу болсо, ошол чыгарылыш ыкмасын тандап алабыз.

Мисал 3.2.3. $y''=k\sqrt{1+(y')^2}\,,\ k=const\,,k\neq 0$ (3.2.5)

теңдемесин

$$y(0)=1/k,\ \ y'(0)=0 \qquad (3.2.6)$$

баштапкы шарттары менен чыгаргыла.

Чыгаруу. $y'=z$ жана $y''=z'$ десек, биринчи тартиптеги теңдемеге келебиз $z'=k\sqrt{1+z^2}$ же $dz/\sqrt{1+z^2}=k\,dx$, мында $ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=kx+c_1$.

(3.2.6) шартынын негизинде $z(0)=y'(0)=0$, мындан $c_1=0.$

Анда $z+\sqrt{1+z^2}=e^{kx}$. Оң жагына z ти алып өтүп, квадратка көтөрүп, төмөнкү барабардыкты алабыз:

$$z=y'=(1/2)\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)\equiv sh\,kx\,.$$

Интегралдап төмөнкүнү табабыз

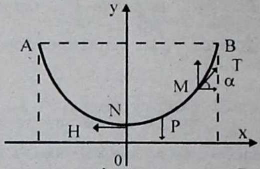
$$y+c_2=(1/2/k)\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)\equiv(1/k)ch\,kx\,.$$

(3.2.6) нын негизинде $c_2=0$ жана биз изделген чыгарылышты алабыз:

$$y=(1/2/k)\left(e^{kx}+e^{-kx}\right)\equiv(1/k)ch\,kx\,. \qquad (3.2.7)$$

Мисал 3.2.4. Чынжыр сызыгынын математикалык модели.

Эки учунан кадалып бекитилген жана өз салмагынын таасири астында болгон бир тектүү созулбас, ийилчээк жиптин (чынжырдын) формасын табабыз (4-сүрөт.).



4-сүрөт

Oy огу деп сызыктын төмөнкү N чекитинен өткөн вертикалдуу түз сызыкты алабыз; Ox огун N чекитинен, азырынча аныктала элек аралыкта горизонталдуу жүргүзөбүз.

Сызыктын каалаган M чекитин алалы. Тең салмактуулук шарты аткарылган учурда NM жиптин бөлүгүн катуу нерсе катары кароого болот. Бул бөлүккө үч күч таасир этет:

Жиптин горизанталдуу керилүү күчтөрү H, M чекитинде сызыктын жанымасы боюнча багытталган керилүү күчтөрү T жана P өздүк салмагынын $S\delta$ га барабар болгон чоңдугу, мында NM жаасынын узундугу S, ал эми δ – жиптин узундугунун бирдик салмагы.

Тең салмактуулук шартына ылайык төмөнкүгө ээ болобуз:

$$T\sin\alpha = S\delta,\ T\cos\alpha = H\ .$$

Биринчи барабардыкты экинчиге мүчөлөп бөлүп төмөнкүнү алабыз: $tg\alpha = (\delta/H)S$. Демек, эгерде $y=\varphi(x)$ - ANB сызыгынын изделген теңдемеси болсо, анда $y' = kS$ болот, мында $k = \delta / H = const$. Бул барабардыкты x боюнча дифференциалдап, төмөнкүгө ээ болобуз: $y'' = kS' = k\sqrt{1+y'^2}$.

Бул теңдеме **3.2.3.** мисалында каралган (3.2.5) теңдемеси.

Ошентип, бир тектүү оор чынжыр (чынжыр сызыгы) (3.2.7) түрүндөгү тең салмактуу формага ээ.

§ 3.3. Жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелер. Тартиби төмөндөтүүгө боло турган теңдемелер

Интегралдын графиги берилген дифференциалдык теңдеменин интегралдык ийри сызыгы деп аталат.

Теңдеменин сол жагына улам жогорку тартиптеги туундулар кире баштаган сайын дифференциалдык теңдемени чыгаруу татаалданышы табигый нерсе. Жогорку туундусуна карата чыгарылган n-тартиптеги теңдемени карайлы

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{3.3.1}$$

мында f функциясы өз аргументтеринин өзгөрүүсүнүн кандайдыр бир $D \subset R^{n+1}$ областында үзгүлтүксүз функция деп болжолдонот. (3.3.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышы n каалагандай туруктуу сандан көз каранды: $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Эгерде (3.3.1) теңдемесинин оң жагы y, y', …, $y^{(n-1)}$ чоңдуктарына карата сызыктуу функция болсо, анда бул теңдеме сызыктуу деп аталат.

Жалпы чыгарылыштан $c_1, c_2, \dots, c_n$ туруктуулардын конкреттүү маанилеринде алынган каалагандай чыгарылыш (3.3.1) дифференциалдык теңдеменин айрым чыгарылышы деп аталат.

(3.3.1) дин айкын эмес жалпы чыгарылышын берген $\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ түрүндөгү теңдеме, (3.3.1) теңдемесинин жалпы интегралы деп аталат. $c_1, c_2, \dots, c_n$ туруктууларына мүмкүн болгон конкреттүү сандык маанилерин берип, дифференциалдык теңдеменин айрым интегралын алабыз.

Маселенин конкреттүү шарттарына жооп берген айрым чыгарылышты бөлүп алуу үчүн баштапкы шарттарды берүү керек. Алар төмөнкү түрдө болот

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \; y'\big|_{x=x_0} = y_0', \dots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{3.3.2}$$

б.а. $x = x_0 \in I$ болгондо, функциянын өзүнө жана анын алгачкы $(n-1)$ туундуларына маанилер берилет (Коши маселеси). Жалпы чыгарылышты $(n-1)$ жолу дифференциалдап жана баштапкы шарттарды коюп, n белгисизи $c_1, c_2, \dots, c_n$ бар системаны алабыз.

Айрым чыгарылыштын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндө суроого $n = 1$ жана $n = 2$ болгон учурларында келтирилгендерге окшош теорема жооп берет.

Теорема 3.3.1 (Пикар). Эгерде $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ баштапкы шарттарында f функциясы бардык өзүнүн аргументтеринен үзгүлтүксүз функция жана экинчи аргументинен баштап бардык аргументтери боюнча Липшиц шартын канааттандырса, анда (3.3.2) баштапкы шарттарын канаатандырган (3.3.1) теңдемесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз.

Тартибин төмөндөтүүгө мүмкүн болгон дифференциалдык теңдеменин кээ бир түрлөрүн көрсөтөбүз.

1^0. $y^{(n)} = f(x)$ түрүндөгү теңдеме (3.3.3)

n жолу интегралдагандан кийин төмөнкү жалпы чыгарылыш келип чыгат

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n\ жолу} f(x)\,\underbrace{dx \ldots dx}_{n\ жолу} + c_1\left(x^{n-1}/(n-1)!\right) +$$
$$+ c_2\left(x^{n-2}/(n-2)!\right) + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Жалпы чыгарылышты Коши формасында жазууга болот

$$\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \ldots dx + (y_0^{(n-1)}/(n-1)!)(x-x_0) +$$
$$+ (y_0^{(n-2)}/(n-2)!)(x-x_0) + \ldots + y_0'(x-x_0) + y_0. \qquad (3.3.4)$$

$$\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \ldots dx = (1/(n-1)!)\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

болгондуктан (**§ 3.2** (3.2.1) карагыла), (3.3.4) жалпы чыгарылышын төмөнкү түрдө жазууга болот

$$y = 1/(n-1)!\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt + y_0^{(n-1)}(x-x_0)^{n-1} +$$
$$+ y_0^{(n-2)}(x-x_0)^{n-2} + \ldots + y_0'(x-x_0) + y_0. \qquad (3.3.5)$$

Айрым учур үчүн б.а. изделген функциянын жана анын туундуларынын нөлдүк баштапкы маанилери менен, б.а. $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$ чыгарылыш төмөнкү түрдө болот: $y_1 = 1/(n-1)!\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$

Эгерде y_1 функциясы (3.3.3) теңдемесинин кандайдыр бир айрым чыгарылышы болсо, анда $y = y_1 + z$ деп, z үчүн $z^{(n)} = 0$ дифференциалдык теңдемени алабыз. Андан

$$z = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n .$$

Ошондуктан, (3.3.3) теңдемесинин жалпы чыгарылышы:

$y = y_1 + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$ болот.

2^0. Туундусуна карата чечилбеген n- тертиптеги теңдемелер

Төмөнкү теңдеме берилсин:

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0 . \tag{3.3.6}$$

Эгерде бул теңдемени $y^{(n)}$ ге карата (элементардык функцияларда) чыгарууга мүмкүн болсо, анда жогоруда каралган бир же бир нече теңдемелерди алабыз (1^0 пункту карагыла). Бардык ушул теңдемелерди интегралдап, (3.3.6) нын жалпы интегралын табабыз.

(3.3.6) теңдемеси $y^{(n)}$ ге карата чечилбеген болсун, бирок төмөнкү параметрдик көрүнүштү бере алат дейли:

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \phi(t). \tag{3.3.7}$$

Бул учурда параметрдик формада жалпы чыгарылышты табууга болот. x чоңдугу t параметри аркылуу туюнтулгандыктан, маселе y ти t аркылуу туюнтууга келтирилет.

Төмөнкүнү алабыз:

$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx, \; dy^{(n-1)} = \phi(t)\varphi'(t)\, dt$, андан

$y^{(n-1)} = \int \phi(t)\varphi'(t)\, dt \equiv \phi_1(t, c_1)$. Ушунун өзүндөй эле $y^{(n-2)}$ үчүн туюнтулушту табабыз ж.б.. Акырында y үчүн

$$y = \phi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Демек,

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \phi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n). \end{cases} \tag{3.3.8}$$

(3.3.8) теңдемесин (3.3.6) теңдемесинин параметрдик формадагы жалпы чыгарылышы деп атайбыз.

3^0. Изделүүчү функцияны жана алгачкы бир нече туундуларды камтыбаган теңдемелер

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad (1 < k \leq n) \tag{3.3.9}$$

түрдөгү теңдемени карайлы.

$y^{(k)} = u$ (мында u –жаңы белгисиз функция) алмаштыруу-ну киргизүүнүн жардамы менен (3.3.9) теңдемесин $(n-k)$ тартибиндеги теңдемеге алып келебиз:

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}\right) = 0. \tag{3.3.10}$$

Эгерде (3.3.10) теңдемеси квадратурада интегралданса, анда y өзгөрмөсүнө кайтып келип, (3.3.9) теңдемесинин ортодогу интегралын алабыз:

$$y^{(k)} = \varphi\left(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}\right) \text{ же}$$

$$\Phi\left(x, y^{(k)}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}\right) = 0. \tag{3.3.11}$$

(3.3.11)теңдемеси (3.3.6) тибиндеги теңдеме.

4^0. Көз каранды эмес өзгөрмөнү камтыбаган теңдемелер

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.3.12}$$

$y' = p$ өзгөртүүсү теңдеменин тартибин бирге төмөндөтө алат. Мында p чоңдугу y тен жаңы белгисиз функция катары каралат: $p = p(y)$. Бардык $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ туундуларды p белгисиз функциянын y боюнча болгон туундулары аркылуу туюнтулат:

$$y' = dp/dy = p,$$

$$y'' = dp/dx = dp/dy(dy/dx) = p dp/dy,$$

$$y''' = d/dx\left(p dp/dy\right) = d/dy\left(p dp/dy\right)dy/dx = \\ = p^2 d^2 p/dy^2 + p\left(dp/dy\right)^2, \quad \text{ж.б.}$$

Бул туюнтмаларды (3.3.12) теңдемесиндеги $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ дин ордуна коюп, $(n-1)$- тартиптеги дифференциалдык теңдемени алабыз.

5^0. $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ аргументтерине карата бир тектүү

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \text{ теңдеме, б.а.}$$

$$F\left(x, ty, ty', ty'', ..., ty^{(n)}\right) = t^k F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$$

Мындай теңдеменинин тартибин $y = exp(\int z\, dx)$ ордуна коюусу менен (мында z чоңдугу x тен жаңы белгисиз функция: $z = z(x)$) бирге төмөндөтүүгө болот.

Мисал 3.3.1. $xy^{V} - y^{IV} = 0$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Теңдеме изделүүчү функцияны жана анын үчүнчү тартипке чейинки туундуларын камтыбайт. Ошондуктан, $y^{IV} = p$ деп, $x\dfrac{dp}{dx} - p = 0$ ду алабыз, мындан $p = c_1 x$, $y^{IV} = c_1 x$. Андан ары дагы интегралдап, төмөнкүлөрдү табабыз:

$$y'' = c_1(x^3 / 3!) + c_2 x + c_3,$$

$$y' = c_1(x^4 / 4!) + c_2(x^2 / 2) + c_3 x + c_4,$$

$$y = c_1(x^5 / 5!) + c_2(x^3 / 3!) + c_3(x^2 / 2) + c_4 x + c_5.$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Тартипти төмөндөтүүчү методдорду колдонуп, дифференциалдык теңдемелерди чыгаргыла:

№ 78. $y'' = x + \sin x$.

№ 79. $x^2 y'' = (y')^2$.

№ 80. $x - exp(y'') + (y'')^2 = 0$.

№ 81. $y''' = -1/2(y')^3$.

№ 82. $y'' = f(y)$.

№ 83. $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$.

§ 3.4. Экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер

1^0. Аныктамалар жана жалпы касиеттер

Аныктама. Белгисиз функция жана анын туундуларына карата биринчи даражадагы (сызыктуу) теңдеме:

$$L(y) \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (3.4.1)$$

экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме деп аталат.

$f(x)$ функциясы теңдеменин оң жагы деп аталат. Эгерде x тин бардык каралган маанилеринде $f(x)$ функциясы нөлгө барабар болсо, анда (3.4.1) теңдемеси бир тектүү сызыктуу теңдеме деп аталат. Андай болбосо, (3.4.1) теңдемеси бир тектүү эмес сызыктуу теңдеме деп аталат.

Эгерде кандайдыр бир $a \le x \le b$ интервалында $a_1(x)$, $a_2(x)$ жана $f(x)$ функциялары үзгүлтүксүз болушса, анда (3.4.1) теңдемеси каалагандай баштапкы шарттарда: $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ (мында $x_0 \in (a,b)$) жалгыз чыгарылышы ээ болот, анткени $y'' = -a_1(x)y' - a_2(x)y + f(x)$ түрүндө жазылган (3.4.1) теңдемеге чыгарылыштын жашашы жана жалгыз болушу жөнүндөгү теореманын шарттары орундалат (**п.3.1** карагыла); мында оң жагы жана анын y боюнча (бул $-a_2(x)$) жана y' (бул$-a_2(x)$) боюнча айрым туундулары үзгүлтүксүз.

$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ сызыктуу теңдемесинин эки жагын $p_0(x)$ ке бөлүп, (3.4.1) түрүнө формалдуу алып келүүгө болоорун белгилей кетели. Мында $p_0(x) = 0$ чекиттеринде чыгарылыштын жашаш теоремасынын шарттары бузулушу мүмкүн; мындай чекиттер - өзгөчө деп аталат.

а) Адегенде төмөндөгүдөй бир тектүү теңдемени карайлы:

$$L(y) \equiv y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (3.4.2)$$

мында, кыскача, $a_1 = a_1(x)$ жана $a_2 = a_2(x)$ деп белгиленген. Айрым учурда a_1 жана a_2 турактуу болушу мүмкүн.

Теорема 3.4.1. Эгерде $y_1(x)$ жана $y_2(x)$ функциялары - (3.4.2) теңдемесинин чыгарылыштары болсо, анда $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ функциясы (c_1, c_2 –каалагандай турактуулар) дагы (3.4.2) теңдемесинин чыгарылышы болот.

Кыскалык үчүн мындан ары чыгарылышты y_1 жана y_2 түрүндө жазабыз жана $c_1 y_1 + c_2 y_2$ туюнтмасын алардын сызыктуу комбинациясы деп атайбыз.

Далилдөө. $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ функциясын эки жолу дифференциалдайбыз

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2', \quad y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

y, y', жана y'' ти (3.4.2)нин сол жагына коюп, төмөнкүнү алабыз

$$c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a_1(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$
$$= c_1(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_2) + c_2(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2).$$

y_1 жана y_2 чыгарылыш болгондуктан, эки кашаа тең нөлгө теңдеш барабар болот. Демек, $y(x)$ функциясы (3.4.2) ни канааттандырат, так ушуну далилдөө керек болчу.

Далилденген теореманын негизинде бир тектүү сызыктуу теңдеменин жалпы чыгарылышынын структурасы жөнүндө төмөнкүдөй корутунду чыгарууга болот.

Теорема 3.4.2. Эгерде (3.4.2) теңдемесинин y_1, y_2 –чыгарылыштарынын катышы турактуу $y_1 / y_2 \neq const$ чоңдукка барабар болбосо анда бул функциялардын сызыктуу комбинациясы

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{3.4.3}$$

теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

Жогорудагы теорема боюнча (3.4.3) туюнтмасы (3.4.2) нин чыгарылышы. Демек, (3.4.3) формуласы эки турактууну камтыган учурда гана жалпы чыгарылыш боло алат, ошондуктан $y_1 / y_2 = k = const$ болгон учурун кароодон чыгарып салабыз. Себеби, $y_2 = k y_1$ десек, $c_1 y_1 + c_2 y_2 = (c_1 k + c_2) y_1$ туюнтмасы эки турактууну эмес, накта бир гана турактууну камтып калат. (3.4.2) теңдемеси $y = 0$ деген айрым чыгарылышка ээ. Бул чыгарылыш нөлдүк же тривиалдык деп аталат.

Жалпы чыгарылыштын негизги касиетин далилдейбиз;

(3.4.3) жалпы чыгарылышынын ичинен, баштапкы шарттар кандай гана берилбесин: $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ (мында $x_0 \in (a,b)$) ушул шарттарды канааттандырган айрым чыгарылышты табууга мүмкүн болот.

(3.4.3)кө баштапкы маанилерди жана анын туундуларын коюп, c_1, c_2ге карата сызыктуу алгебралык теңдемелер системасын алабыз:

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 \cdot y_{20} = y_0, \\ c_1 y_{10}' + c_2 \cdot y_{20}' = y_0', \end{cases} \tag{3.4.4}$$

мында $y_{i0} = y_i(x_0),\ y'_{i0} = y'_i(x_0),\ (i = 1,2)$ – белгилүү сандар.

(3.4.4) системасы, оң жагынын каалагандай маанисинде чыгарылышка ээ болушу үчүн системанын аныктагычынын нөлгө барабар эмес болушу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.4.5)$$

зарыл жана жетиштүү болот. Анда (3.4.4) системасынын чыгарылышы жашайт, жалгыз жана Крамердин формуласы менен табылат

$$c_1 = \Delta_{c_1} / \Delta,\ c_2 = \Delta_{c_2} / \Delta,$$

мында $\Delta_{c1} = \begin{vmatrix} y_0 & y_{20} \\ y'_0 & y'_{20} \end{vmatrix},\ \Delta_{c2} = \begin{vmatrix} y_{10} & y_0 \\ y'_{10} & y'_0 \end{vmatrix}$. (Эгерде аныктагыч $\Delta = 0$ болсо, анда чыгарылышы жок же болбосо теңдеме $y_{10} / y'_{10} = y_{20} / y'_{20} = y_0 / y'_0$ шарттарда гана чыгарылышка ээ, б.а. y_0, y'_0 баштапкы шарттардын каалагандай маанилери үчүн эмес). Эми теореманын акыркы бөлүгүн карама-каршылыкка келүү методу менен далилдейли. (3.4.5) деги Δ аныктагычты нөлгө барабар деп алалы. Анда $y_0 = 0,\ y'_0 = 0$ нөлдүк баштапкы шарттардан келип чыккан

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} = 0 \\ c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' = 0, \end{cases}$$

бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы $c_i = 0$ $(i=1,2)$ нөлдүк чыгарылыштан башка чексиз көп нөлдүк эмес чыгарылыштар көптүгүнө ээ. c_{10}, c_{20} – ошолордун бири болсун. Анда $c_{10}\, y_1 + c_{20}\, y_2$ нөлдүк баштапкы шарттарда (3.4.2) теңдеменин чыгарылышы болот. Бирок тривиалдык чыгарылыш $y \equiv 0$ дагы ушул шарттарды канааттандырат, ал эми жалгыздык теоремасы боюнча чыгарылыш бирөө гана болушу керек, анда

$$c_{10}\, y_1 + c_{20}\, y_2 \equiv 0.$$

Мындан $y_2 / y_1 = -c_{10} / c_{20} = const$. Бул болсо $y_2 / y_1 \neq const$ шартына карама-каршы (эгерде $c_{20} = 0$, анда $y_1 \equiv 0$ бул болсо, шарт боюнча мүмкүн эмес). Ошентип, x_0 чекитинде $\Delta = 0$ деп алсак, биз карама-каршылыкка келдик. Так ушуну далилдөө керек болчу.

б) бир тектүү эмес (3.4.1)теңдемесине кайрылалы.

Ушул теңдеменин жалпы чыгарылышынын структурасы жөнүндөгү теореманы далилдейли.

<u>**Теорема 3.4.3.**</u> (3.4.1)теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү формула менен табылат

$$y = \overline{y} + \widetilde{y}, \tag{3.4.6}$$

мында $\overline{y}$ - (3.4.1) теңдемесине дал келген (3.4.2) сызыктуу бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы, ал эми $\widetilde{y}$ – (3.4.1) бир тектүү эмес теңдеменин кандайдыр бир, айрым чыгарылышы.

<u>Далилдөө</u>. (3.4.6) дан төмөнкүгө ээ болобуз

$$y' = \overline{y}' + \widetilde{y}', \quad y'' = \overline{y}'' + \widetilde{y}''.$$

(3.4.1)дин сол жагына $y,\ y',\ y''$ ди коёлу:

$$L(\overline{y} + \widetilde{y}) = [\overline{y}'' + a_1\overline{y}' + a_2\overline{y}] + [\widetilde{y}'' + a_1\widetilde{y}' + a_2\widetilde{y}].$$

Биринчи квадраттык кашаадагы туюнтма нөлгө барабар, себеби $\overline{y}$ – (3.4.2) нин чыгарылышы, ал эми экинчи квадраттык кашаадагы туюнтма $f(x)$ ке барабар, себеби $\widetilde{y}$ – (3.4.1) теңдемесинин чыгарылышы.

Демек, эгерде (3.4.6) чыгарылышы эки каалагандай туруктуу сандан көз каранды болсо (алардан $\overline{y}$ функциясы көз каранды), анда ал жалпы чыгарылыштын өзү болот. Чындыгында теорема далилденди.

Ошентип, бир тектүү эмес теңдеменин чыгарылышын табуу үчүн, ага дал келген бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышын жана берилген теңдеменин кандайдыр бир эле айрым чыгарылышын табуу керек. Муну мындай түрдө жазса болот: $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \widetilde{y}(x)$, мында $y_1,\ y_2$ – дал келген бир тектүү теңдеменин чыгарылыштары, ал эми $\widetilde{y}(x)$ – бир тектүү эмес теңдеменин айрым чыгарылышы.

2°. Турактуу коэффициенттүү экинчи тартиптеги бир тектүү теңдемелер

Адегенде турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу теңдемени карайлы

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3.4.7}$$

мында a_1, a_2 – турактуу чыныгы сандар. (3.4.7) нин жалпы чыгарылышын табалы. Жалпы чыгарылышты тургузуу үчүн Эйлердин методун колдонобуз:

(3.4.7) нин айрым чыгарылышын

$$y = e^{\lambda x} \tag{3.4.8}$$

түрүндө издейбиз, мында λ – кандайдыр бир турактуу сан (чыныгы же комплекстүү), λ ны табуу үчүн (3.4.8) функциясынын $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ туундуларын эсептеп (3.4.7) теңдемесине коёбуз.

$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda x} = 0$ теңдештиги орун алышы керек же $e^{\lambda x} \neq 0$ болгондуктан, λ саны төмөнкү квадраттык теңдемени канааттандырышы керек:

$$Q(\lambda) \equiv \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{3.4.9}$$

Мындан көрүнүп тургандай, λ саны (3.4.9) квадраттык теңдеменин тамыры болсо, анда $e^{\lambda x}$ (3.4.7) дифференциалдык теңдеменин чыгарылышы болот.

(3.4.9) теңдемеси (3.4.7) теңдемесинин мүнөздөгүч теңдемеси, ал эми анын тамырлары – (3.4.7) теңдемесинин мүнөздөгүч сандары деп аталат.

Жалпы чыгарылыштын структурасы (3.4.9) мүнөздөгүч теңдемесинин тамырларынын түрлөрүнөн көз каранды. Төмөнкүдөй үч учурду карайбыз:

1) λ_1, λ_2 – чыныгы жана ар түрдүү сандар: $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) λ_1, λ_2 – чыныгы жана барабар сандар: $\lambda_1 = \lambda_2$ (λ_1 – (3.4.9) теңдемесинин эки эселүү тамыры);

3) λ_1, λ_2 - комплекстүү түйүндөш сандар: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta \neq 0$.

Ушул учурларды өз өзүнчө карап чыгалы.

1) Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары – чыныгы жана ар түрдүү, демек, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Бул учурда (3.4.8) формуласы боюнча эки чыгарылышты алабыз. Булардын тийиндиси турактуу чоңдук эмес: $e^{\lambda_1 x} / e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq const.$

Мүнөздөгүч теңдеменин чыныгы жана ар түрдүү тамырлары учурунда жалпы чыгарылыш төмөнкүдөй формула аркылуу берилет: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, мында c_1, c_2 – каалагандай турактуу сандар.

Бул учурда (3.4.5) аныктагычы нөлгө барабар эместигин оңой эле текшерүүгө болот. Кандайдыр бир x_0 маанисин берип төмөнкү аныктагычты түзөбүз:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x_0} & e^{\lambda_2 x_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x_0}(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0,$$

себеби $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2) Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары - чыныгы жана барабар: $\lambda_1 = \lambda_2$. Бул учурда $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ деген бир эле чыгарылышты табууга болот. Экинчи чыгарылыштын ордуна $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ функциясын алууга мүмкүн экендигин көрсөтөбүз.

y_2 функциясын эки жолу дифференциялдап төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y_2' = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x},$$

$$y_2'' = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Табылгандарды (3.4.7) теңдемесинин сол жагына коёлу:

$$2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} + a_1\left(e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}\right) + a_2 x e^{\lambda_1 x} =$$

$$= e^{\lambda_1 x}[x(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) + (2\lambda_1 + a_1)].$$

λ_1–мүнөздөгүч теңдеменин тамыры, анда $\lambda_1^2 + a_2\lambda + a_2 = 0$. λ_1 – квадраттык теңдеменин эки эселүү тамыры болгондуктан, Виета формуласы боюнча $\lambda_1 + \lambda_1 = -a_1$ болот, б.а. $2\lambda_1 + a_1 = 0$. Демек, квадраттык кашаадагы туюнтма нөлгө барабар жана $y = xe^{\lambda_1 x}$ функциясы чын эле (3.4.7) теңдемесинин чыгарылышы болот. Мүнөздөгүч теңдеменин чыныгы жана барабар тамырлары болгон учурда жалпы чыгарылыш төмөнкү түрдө жазылат:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}.$$

Мында (3.4.5) аныктагычы x_0 дун эч кандай маанилеринде нөлгө барабар эместигин текшерүү кыйын эмес:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x_0} & x_0 e^{\lambda_2 x_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x_0} & e^{\lambda_1 x_0} + \lambda_1 x_0 e^{\lambda_2 x_0} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x_0} \neq 0.$$

3) Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары - комплекстүү түйүндөш сандар: $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \beta \neq 0$. Ушул эки тамырга теңдеменин эки айрым чыгарылышы дал келет: $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,\ y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Булардын тийиндиси турактуу эмес экени ачык көрүнүп турат. Эгерде λ_1, λ_2 тамырлары таза мнимый болушса, б.а. $\lambda_1 = \beta i,\ \lambda_2 = -\beta i$, анда дал келген айрым чыгарылыштар төмөнкүдөй болот:

$$y_1 = \cos \beta x,\ y_2 = \sin \beta x.$$

Демек, мүнөздөгүч теңдеменин комплекстүү түйүндөш тамырлар учурунда жалпы чыгарылыш $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$ түргө ээ болот. Мында да (3.4.5) аныктагычы нөлгө барабар эместигин оңой эле көрсөтүүгө болот.

Мисал 3.4.1. $y'' - 2y' - 3y = 0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Мүнөздөгүч теңдемени түзөбүз: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

Анын тамырларын табабыз: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Алар чыныгы жана ар түрдүү болгондуктан, жалпы чыгарылыш $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$ түрүндө жазылат.

Мисал 3.4.2. $y'' + 2y' + y = 0$ теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Мүнөздөгүч теңдеме: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

Анын тамырлары: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Тамырлар чыныгы жана барабар, ошондуктан жалпы чыгарылыш төмөнкү түрдө болот:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Мисал 3.4.3. Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Чыгаруу. $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары $\lambda_1 = -2 + 3i,\ \lambda_2 = -2 - 3i$. Жалпы чыгарылышы: $y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

Мисал 3.4.4. Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла:

$$y'' + \omega^2 y = 0, \ (\omega = const).$$

Чыгаруу. $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ мүнөздөгүч теңдемеден $\lambda_1 = \omega i,\ \lambda_2 = -\omega i$ экенин табабыз. Ошондуктан $y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$.

Алынган чыгарылышты (синус жана косинустун суммасы) аргументи жылдырылган синус түрүнө өзгөртүүгө мүмкүн:

$$y = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x = A\big((c_1 / A)\cos\omega x + (c_2 / A)\sin\omega x\big),$$

мында $A = \sqrt{c_1^2 + c_1^2}$.

Жардамчы φ бурчту киргизебиз:

$c_1 / A = \sin\varphi,\ c_2 / A = \cos\varphi$. φ бурчу төмөнкү формула аркылуу табылат $\varphi = arctg\, c_1 / c_2$. Анда

$$y = A(\sin\varphi \cos\omega x + \cos\varphi\ \sin\omega x) = A \sin(\omega x + \varphi).$$

Каалагандай баштапкы шартты берип, c_1, c_2 турактуу сандарынын же A, φ нин жалгыз маанилерин табабыз.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Турактуу коэффициенттүү сызыктуу бир тектүү дифференциалдык теңдеменин мүнөздөгүч теңдемесинин берилген тамырлары аркылуу дифференциалдык теңдемени түзгүлө жана анын жалпы чыгарылышын жазгыла:

№ 84. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$.

№ 85. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

№ 86. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин жалпы чыгарылышын тапкыла:

№ 87. $y'' - 6y' + 8y = 0$.

№ 88. $y'' - y' - 2y = 0$.

№ 89. $y'' - y' + y = 0$.

№ 90. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

№ 91. $y'' + 4y' = 0$.

№ 92. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

№ 93. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

№ 94. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

Берилген баштапкы шарттар аркылуу теңдемелердин айрым чыгарылыштарын тапкыла:

№ 95. $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

№ 96. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(2) = 1,\ \ y'(2) = -2$.

3°. Туруктуу коэффициенттүү экинчи тартиптеги бир тектүү эмес теңдемелер

Туруктуу коэффициенттери a_1, a_2 болгон бир тектүү эмес сызыктуу теңдемени карайлы:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (3.4.10)$$

Бизге белгилүү болгондой, мындай теңдеменин жалпы чыгарылышы (3.4.6) түрүндө болот. Бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышын табууну билген соң, (3.4.10) теңдемесинин айрым чыгарылышын гана табуу калат.

Кээ бир учурда (3.4.10) теңдемеси үчүн айрым чыгарылышын аныкталбаган коэффициентер методу аркылуу табууга болот.

Ушул учурларды жана аларга туура келген айрым чыгарылыштын түрлөрүн көрсөтөбүз.

а) <u>(3.4.10) теңдемесинин оң жагы</u> $\underline{f(x) = P(x)e^{\alpha x}}$ <u>түрүндө болсун дейли</u>: мында $P(x)$ – x тен полином (айрым учурда – нөлдөн айырмалуу туруктуу сан). Анда (3.4.10) теңдемеси $\tilde{y} = x^k Q(x) e^{\alpha x}$ түрдөгү айрым чыгарылышка ээ, мында $Q(x)$ көп мүчөсүнүн даражасы $P(x)$ тин даражасына барабар жана дагы α саны $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ мүнөздөгүч теңдемесинин тамыры болбосо, $k = 0$, ал эми тамыры болсо, анда k – ушул тамырдын эселигин көрсөтөт.

<u>Эскертүү.</u> Ереже $\alpha = 0$ болгон учурда күчүн сактай берет, б.а. оң жагында бир гана полином турат; бул учурда 0 саны мүнөздөгүч теңдеменин тамыры эместигин текшерүү керек.

б) (3.4.10) теңдемесинин оң жагы төмөнкү түрдө болсун:

$$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x .$$

Эгерде $\pm i\beta$ саны мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары болбосо, анда теңдеме $\tilde{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$ түрдөгү айрым чыгарылышка ээ.

Эгерде $\pm i\beta$ саны мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары болсо, анда айрым чыгарылыш $y = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ түрүндө болот.

Айрым учурларда, б.а. $a = 0$ же $b = 0$ болсо деле чыгарылышты толук түрдө издөө керек.

Эми аныкталбаган коэффициенттер методун колдонуп, чыгарылышты табууга мүмкүн болгон теңдеменин оң жагынын эң жалпы түрүнө өтөлү.

в) $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$ болсун дейли, мында $P_1(x)$, $P_2(x)$ – x тен полином, ал эми $\alpha \pm i\beta$ саны мүнөздөгүч теңдеменин тамыры эмес. Анда айрым чыгарылышты $\widetilde{y} = e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$ түрүндө издөө керек. Мында $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ полиномдорунун даражалары $P_1(x)$, $P_2(x)$ полиномдорунун эң чоң даражасына барабар.

$\alpha \pm i\beta$ саны мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болсо, анда айрым чыгарылыштын жогоруда көрсөтүлгөн формасына x ти көбөйтүү керек. Биз талкуулаган

а) учуру, $\beta = 0$ болгондогу келтирилген жалпы чыгарылыштан алынат, ал эми

б) учуру, $\alpha = 0$ жана $P_1(x) = a$, $P_2(x) = b$ болгондо келип чыгат.

г) (3.4.10) теңдемесинин оң жагы $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_q(x)$ ке барабар болсун, мында $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)$ – а)–в) дагы каралган функциялар. Эгерде $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x)$ функциясына дал келген $y_1, y_2, \ldots, y_q$ айрым чыгарылыштары болсо, анда $Y_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_q$ (3.4.10) теңдемесинин айрым чыгарылышы болот (чыгарылыштардын суперпозиция принциби).

Айрым чыгарылыштарды издөөдө көрсөтүлгөн методдорду колдонууну окурманга жеткилең жеткирүү максатында төмөнкү иллюстративдик мисалдарды келтиребиз.

Мисал 3.4.5. Төмөнкү теңдеменин

$$y'' + y = 4xe^x \qquad (3.4.11)$$

жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. $\lambda^2 + 1 = 0$ мүнөздөгүч теңдемеси ар түрдүү тамырларга ээ: $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, ошондуктан тиешелүү бир тектүү теңдеменин дал келген жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй болот

$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

$\alpha = 1$ мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болуп саналбайт, ошондуктан $\tilde{y}$ айрым чыгарылышын $\tilde{y} = (A_1 x + A_0)e^x$ түрүндө издөө керек, мында A_0, A_1 – аныкталуусу керек болгон азырынча белгисиз коэффициенттер. $\tilde{y}$ үчүн туюнтманы (3.4.11) теңдемесине коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\tilde{y}' = A_1 e^x + (A_1 x + A_0)e^x .$$

$$\tilde{y}'' = A_1 e^x + A_1 e^x + (A_1 x + A_0)e^x .$$

$$2A_1 e^x + (A_1 x + A_0)e^x + (A_1 x + A_0)e^x = 4xe^x .$$

Мындан x тин бирдей даражаларынын коэффициенттерин салыштырып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{array}{l|l} x^0: & 2A_1 + 2A_0 = 0 \\ x^1: & 2A_1 = 4. \end{array}$$

Бул системаны чыгарып, $A_1=2$, $A_0=-2$ ни табабыз. Ошентип, берилген теңдеменин айрым чыгарылышы $\tilde{y} = 2(x-1)e^x$ болот жана (3.4.11) бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө болот:

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2(x-1)e^x .$$

Мисал 3.4.6.

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x \qquad (3.4.12)$$

теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. $\lambda^2+\lambda-2 = 0$ мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ тамырларына ээ, ошондуктан тиешелүү бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$ болот. $\alpha = 1$ мүнөздөгүч теңдеменин жөнөкөй тамыры болгондуктан, (3.4.12) бир тектүү эмес теңдемесинин $\tilde{y}$ айрым чыгарылышын $\tilde{y} = x(A_1 x + A_0)e^x$ түрүндө издейбиз. Аны (3.4.12) теңдемесине коюп, теңдеменин эки жагын e^x ке кыскартып жана топтоп төмөнкүнү алабыз:

$3(2A_1x + A_0)e^x + 2A_1 = 3x$. Эми x тин бирдей даражаларынын алдындагы коэффициенттерди барабарлап:

$$\begin{array}{r|l} x^0: & 3A_1 + 2A_0 = 0 \\ x^1: & 6A_1 = 3. \end{array}$$

теңдемелер системасын алабыз. Мындан $A_1 = 1/2, A_0 = -1/3$. Ошентип $\widetilde{y} = x(1/2x - 1/3)e^x$ жана (3.4.12) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкүдөй түрдө болот

$$y = \overline{y}(x) + \widetilde{y}(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + x(1/2x - 1/3)e^x.$$

Мисал 3.4.7.

$$y'' - y = x\sin x \tag{3.4.13}$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Тиешелүү бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$\overline{y} = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

i мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болбогондуктан, бир тектүү эмес теңдеменин айрым чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз

$$\widetilde{y} = (A_1x + A_2)\cos x + (B_1x + B_2)\sin x.$$

Анда

$$\widetilde{y}' = (A_1 + B_2 + B_1x)\cos x + (B_1 - A_2 - A_1x)\sin x,$$

$$\widetilde{y}'' = (2B_1 - A_2 - A_1x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1x)\sin x.$$

Аларды (3.4.13) теңдемесине койсок, төмөнкүлөрдү алабыз

$$(2B_1 - A_2 - A_1x)\cos x - (2A_1 + B_2 + B_1x)\sin x -$$
$$-(A_1x + A_2)\cos x - (B_1x + B_2)\sin x = x\sin x$$

же болбосо

$$(2B_1 - A_2 - A_1x - A_2)\cos x +$$
$$+(-2A_1 - B_2 - B_1x - B_1x - B_2)\sin x = x\sin x$$

Мындан $\cos x$, $\sin x$ тердин алдындагы коэффициенттерди барабарлап, A_1, A_2, B_1, B_2 ге салыштырмалуу теңдемелер системасын алабыз:

$$\cos x: \begin{array}{r|l} x^0 & 2B_1 - 2A_2 = 0 \\ x^1 & -2A_1 = 0, \end{array} \qquad \sin x: \begin{array}{r|l} x^0 & 2A_1 - 2B_2 = 0 \\ x^1 & -2B_1 = 1. \end{array}$$

Бул системаны чыгарып,

$A_1=0,\ A_2=-1/2,\ B_1=-1/2,\ B_2=0$ экенин табабыз. $\widetilde{y}$ айрым чыгарылышы

$$\widetilde{y}=-(1/2)\cos x-(1/2)x\sin x$$

түрүндө жазылат. (3.4.13) теңдемесинин жалпы чыгарылышы

$$y=\overline{y}(x)+\widetilde{y}(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-(1/2)\cos x-(1/2)x\sin x$$

көрүнүштө болот.

Мисал 3.4.8.

$$y''+2y'+5y=e^{-x}\cos 2x \qquad (3.4.14)$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. $\lambda^2+2\lambda+5=0$ мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_{1,2}=-1+2i$ тамырларына ээ, демек $\overline{y}=(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)e^{-x}$ болот. Мүнөздөгүч теңдеменин тамыры $\alpha+i\beta=-1+2i$ болгондуктан, (3.4.14) теңдемесинин айрым чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз

$$\widetilde{y}=x(A\cos 2x+B\sin 2x)e^{-x}.$$

Анда

$$\widetilde{y}'=e^{-x}\left[(A-Ax+2Bx)\cos 2x+(B-Bx-2Ax)\sin 2x\right],$$

$$\widetilde{y}''=e^{-x}\left[(-2A-3Ax+4B-4Bx)\cos 2x+(-2B-3Bx-4A+4Ax)\sin 2x\right].$$

(3.4.14) теңдемесине $\widetilde{y}$ үчүн туюнтманы жана анын туундуларын коюп жана e^{-x} ке кыскартып, $-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x$ ти алабыз. Мындан $A=0,\ B=1/4$, демек, төмөнкүнү алабыз

$$\widetilde{y}=\frac{1}{4}xe^{-x}\sin 2x.$$

(3.4.14) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат

$$y=\overline{y}(x)+\widetilde{y}(x)=(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)e^{-x}+(1/4)xe^{-x}\sin 2x.$$

Мисал 3.4.9.

$$y''-y'=e^x+e^{2x}+x \qquad (3.4.15)$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Ага тиешелүү бир тектүү теңдеме $y''-y'=0$. $\lambda^2-\lambda=0$ мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$ тамырларына ээ. Теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкүчө болот

$$\overline{y} = c_1 + c_2 e^x .$$

Эми (3.4.15) теңдемесинин айрым чыгарылышын табуу керек. Адегенде $y'' - y' = e^x$, $y'' - y' = e^{2x}$, $y'' - y' = x$ үч теңдеменин ар бири үчүн айрым чыгарылышын табабыз.

$$y'' - y' = e^x \tag{3.4.16}$$

теңдемеси $\widetilde{y}_1 = Axe^x$ түрдөгү айрым чыгарылышка ээ, анткени (3.4.16) теңдемесинин оң жагында турган e^x көрсөткүчтүү функциясында x тин алдында турган коэффициент мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болот. $\widetilde{y}_1' = Ae^x + Axe^x$, $\widetilde{y}_1'' = 2Ae^x + Axe^x$ ти (3.4.16) га коюп, $Ae^x = e^x$ ти алабыз, мындан $A = 1$. Демек

$$\widetilde{y}_1 = xe^x . \tag{3.4.17}$$

$$y'' - y' = e^{2x} \tag{3.4.18}$$

теңдемеси төмөнкү түрдөгү айрым чыгарылышка ээ:

$$\widetilde{y}_2 = Ae^{2x} . \tag{3.4.19}$$

(3.4.19)ду (3.4.18) ге коюп, $A = 1/2$ ди табабыз, демек

$$\widetilde{y}_2 = (1/2)e^{2x} . \tag{3.4.20}$$

$$y'' - y' = x \tag{3.4.21}$$

теңдемеси

$$\widetilde{y}_3 = x(Ax + B), \tag{3.4.22}$$

түрүндөгү айрым чыгарылышка ээ, анткени 0 саны мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болуп саналат. (3.4.22) ни (3.4.21)ге койсок, төмөнкүнү алабыз: $2A - 2Ax - B = x$, мындан $A = 1/2, B = -1$, ошондуктан

$$\widetilde{y}_3 = -x((1/2)x + 1) . \tag{3.4.23}$$

Эми (3.4.17), (3.4.20), (3.4.23) айрым чыгарылыштарын кошуп, бүт теңдеменин y_1 айрым чыгарылышын табабыз:

$$y_1 = xe^x + (1/2)e^{2x} - x((1/2)x + 1).$$

Анда (3.4.15) теңдемесинин жалпы чыгарылышы төмөнкүчө болот

$$y = \bar{y} + Y_1 = c_1 + c_2 e^x + x e^x + (1/2) e^{2x} - x((1/2)x + 1).$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Аныкталбаган коэффициенттер методу менен төмөнкү бир тектүү эмес сызыктуу теңдемелердин айрым чыгарылыштарын алдын ала таап, интегралдагыла:

№ 97. $y'' - y = x^2 - x + 1$ № 98. $y'' + 5y' + 6y = 3$

№ 99. $y'' + y' = 3$ № 100. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$

№ 101. $y'' + 4y = \sin 2x$ № 102. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

№ 103. $y'' - 4y = e^x[(-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin x]$.

Берилген дифференциалдык теңдемелердин ар бири үчүн коэффициенттери аныкталбаган айрым чыгарылыштарынын түрүн жазгыла (коэффициенттердин сандык маанилерин табуунун кажети жок):

№ 104. $y'' + y' + ky = x$ № 105. $y'' + ky = e^{ax}$

№ 106. $y'' + k^2 y = \cos\omega x$ № 107. $y'' + y' = e^{-x} + 2x + 1$

№ 108. $y'' - y' = e^x x \sin x$ № 109. $y'' - 7y' = (x - 1)^2$.

Теңдемелердин баштапкы шарттарды канааттандырган айрым чыгарылыштарын тапкыла:

№ 110. $y'' - 2y' = 2e^x;\ \ y(1) = -1,\ y'(1) = 0$

№ 111. $y'' + 4y' = 4e^x;\ \ y(0) = 4,\ y'(0) = -3$

№ 112. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x;\ \ y(\pi) = \pi e^\pi,\ y'(\pi) = e^\pi$.

4°. Лагранждын каалагандай турактуу чоңдуктарды вариациялоо методу

Эгерде бир тектүү (3.4.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышы (3.4.3) түрүндө (мында c_1, c_2 – каалагандай турактуу сандар) бизге белгилүү болсо, анда (3.4.1) бир тектүү эмес (мында $f(x)$ – каалагандай берилген функция) теңдеменин айрым чыгарылышын табуудагы Лагранждын методун баяндайбыз.

Каалагандай турактуу чондуктарды вариациялоо методу турактуу коэффициенттүү теңдемелерге да, ошондой эле a_1, a_2 коэффициенттери x тен көз каранды болгон теңдемелерге да бирдей колдонуларын белгилейбиз. Турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу теңдеменин жалпы чыгарылышын табуу жолу бизге белгилүү болгондуктан, Лагранждын методун биз негизинен ушундай гана теңдемелерге колдонобуз.

(3.4.1) теңдемесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2, \tag{3.4.24}$$

мында $c_1(x)$, $c_2(x)$ – кандайдыр бир азырынча белгисиз функциялар, ал эми y_1, y_2 (3.4.2) бир тектүү теңдеменин белгилүү айрым чыгарылыштары. (3.4.24) барабардыгын дифференциалдайбыз:

$$y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_1'y_2 + c_2y_2'.$$

$$y_1\, c_1' + y_2\, c_2' = 0 \tag{3.4.25}$$

деп эсептейли.

Анда $y = c_1\, y_1' + c_2\, y_2'$.

Дагы бир жолу дифференциалдайбыз:

$$y'' = c_1'\, y_1' + c_1\, y_1'' + c_2'\, y_2' + c_2\, y_2''.$$

y, y', y'' ди (3.4.1) дин сол жагына коюп жана топтоп, төмөнкүнү алабыз

$$c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' + c_1(y_1' + a_1y_1' + a\, y_1) + c_2(y_2' + a_1\, y_2' + a_2\, y_2') = f(x).$$

y_1, y_2 (3.4.2) бир тектүү теңдеменин чыгарылыштары болгондуктан, эки кашаадагы туюнтмалар нөлгө барабар. Демек, $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ функциясы (3.4.1) дин чыгарылышы болуусу үчүн, (3.4.25) шартынан башка $c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = f(x)$ шарты да аткарылышы керек. Ошентип,

$$\begin{cases} c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2 = 0 \\ c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = f(x) \end{cases}$$

теңдемелер системасына келебиз. Бул системанын аныктагычы нөлгө айланбайт ((3.4.5) карагыла):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ошондуктан системадан c'_1, c'_2 лерди, андан кийин интегралдап c_1, c_2 функцияларынын өздөрүн таба алабыз. Эгерде c'_1, c'_2 туундуларды интегралдоодо турактуу чоңдуктарды киргизсек, анда биз (3.4.1) дин жалпы чыгарылышын алабыз.

Мисал 3.4.10.

$$y'' - y' = e^x /(e^x + 1) \tag{3.4.26}$$

теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Мында аныкталбаган коэффициенттер методу аркылуу айрым чыгарылышты табуу мүмкүн эмес. Ошондуктан (3.4.26) теңдемесинин жалпы чыгарылышын табуу үчүн турактуу чоңдуктарды вариациялоо методун колдонобуз. Тиешелүү $y'' - y = 0$ бир тектүү теңдемеси $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ жалпы чыгарылышка ээ болгондуктан, (3.4.25)тин жалпы чыгарылышын

$$y = c_1(x)\ e^x + c_2(x)\ e^{-x} \tag{3.4.27}$$

түрдө издейбиз.

$$\begin{cases} c'_1(x)e^x + c'_2(x)e^{-x} = 0 \\ c'_1(x)e^x - c'_2(x)e^{-x} = e^x /(e^x + 1) \end{cases}$$

системасын түзөбүз. Аны чыгарып, төмөнкүнү табабыз

$$c'_1(x) = (1/2)\left(1/(e^x + 1)\right), \quad c'_2(x) = (-1/2)\left(e^{2x} /(e^x + 1)\right).$$

Интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} c_1(x) = x/2 + (-1/2)\ln\left(e^x + 1\right) + c_1 \\ c_2(x) = (-1/2)e^x + (1/2)\ln\left(e^x + 1\right) + c_2 \end{cases}$$

$c_1(x)$, $c_2(x)$ үчүн алынган туюнтмаларды (3.4.27) формуласына коюп, (3.4.26) теңдемесинин жалпы чыгарылышын төмөнкү түрдө алабыз:

$$y = (1/2)\ \left\{[x - \ln\left(e^x + 1\right)]e^x - 1 + \ln\left(e^x + 1\right)\ e^{-x}\right\} + c_1\ e^x + c_2\ e^{-x}.$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү теңдемелерди турактуу чоңдуктарды вариациялоо методу аркылуу интегралдагыла:

№ 113. $y'' + y = tg\, x$.

№ 114. $y'' + 4y = 1/\cos 2x$.

№ 115. $y'' - y = 1/x$.

№ 116. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 2x + 2)/x^3$.

№ 117. $y'' - y' = ((2-x)/x^3)e^x$.

§ 3.5. *n* - тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер

§ 3.4 да баяндалган экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер теориясы кээ бир жалпылануучу маалыматтар менен n - тартиптеги ($n > 2$) сызыктуу теңдемелерге да көчүрүлөт.

n-тартиптеги сызыктуу теңдеме

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = f(x) \quad (3.5.1)$$

түргө ээ болот, мында $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ коэффициенттери x өзгөрмөсүнөн көз каранды функциялар же турактуу чоңдуктар.

(3.5.1) теңдемеси менен катар ага тиешелүү болгон бир тектүү

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + a_2\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0 \quad (3.5.2)$$

теңдеме дайыма каралат.

(3.5.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын структурасы жөнүндөгү негизги теореманы формулировкалоо үчүн функциялар системасынын сызыктуу көз каранды эместиги түшүнүгүн киргизүү зарыл.

Аныктама. $I = (a,b)$ интервалында аныкталган n функциянын $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ чектүү системасы бар болсун. Эгерде I интервалында x тин бардык маанилеринде

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0 \quad (3.5.3)$$

теңдештиги аткарыла тургандай бардыгы нөлгө барабар болбогон $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ турактуулары табылса, анда $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ функциялары I интервалында сызыктуу көз каранды деп аталат.

Эгерде бул теңдештик $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, болгондо гана аткарылса, анда $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ функциялары I интервалында сызыктуу көз каранды эмес деп аталат.

Б.а., эгерде $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ функцияларынын бирин да башкаларынын сызыктуу комбинациясы түрүндө көрсөтүү мүмкүн болбосо, анда функциялар системасы сызыктуу көз каранды эмес деп аталат. Бул болсо

$$\varphi_1 = k_2\,\varphi_2(x) + ... + k_n\,\varphi_n(x) \tag{3.5.4}$$

(мында $k_2, ..., k_n$ – турактуу чоңдуктар) барабардыгы мүмкүн эмес экендигин түшүндүрөт. Мындан сызыктуу көз каранды эмес функциялардын бири да нөлгө теңдеш барабар эместиги келип чыгат. Эгерде, маселен, $\varphi_1(x) = 0$ болсо, анда (3.5.4) барабардыгы $k_2 = ... = k_n = 0$ болгондо аткарылмак. Айрым учурда, $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(x)$ функцияларынын катышы турактуу чоңдук эмес болсо:

$$\varphi_1(x)/\varphi_2(x) \neq const,$$

анда алар сызыктуу көз каранды эмес болушат. Эгерде I интервалында $\varphi_1(x)/\varphi_2(x) = const$ болсо, анда $\varphi_1(x)$ жана $\varphi_2(x)$ функциялары I интервалында сызыктуу көз каранды болору түшүнүктүү.

$$\varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2, \varphi_3(x) = x^3, \varphi_4(x) = 3x - x^2$$

функциялардын системасы сызыктуу көз каранды функциялардын системасынын мисалы болот.

Чындыгында эле, $\varphi_4(x)$ функциясы калгандарынын сызыктуу комбинациясы болот:

$$\varphi_4(x) = 3\,\varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Мында $\varphi_4(x)$ калган бардыгы аркылуу сөзсүз туюнтулушу керек эмес, б.а. бул учурда (3.5.4.) барабардыгы

$$3\,\varphi_1(x) + (-1)\,\varphi_2(x) + 0\cdot\varphi_3(x) + (-1)\,\varphi_4(x) \equiv 0$$

түрүндө болот.

Мисал 3.5.1. Төмөнкү функциялар системаларын сызыктуу көз карандылыкка изилдегиле:

a) $1, x, x^2, x^3$;

b) $exp(\lambda_1 x), exp(\lambda_2 x), exp(\lambda_3 x)$, мында $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2$ – эки экиден ар башка;

c) $1, \ln x$;

d) $4 - x, 2x + 3, 6x + 8$.

Функциялар өзүлөрү аныкталган областтарда каралышат.

Чыгаруу.

a) $1, x, x^2, x^3$ функциялар системасы $I = (-\infty, \infty)$ интервалында сызыктуу көз каранды болсун дейли. Анда I интервалында төмөнкү теңдештик орун алат:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 = 0, \qquad (3.5.5)$$

мында α_i лердин бардыгы деле $\alpha_i \neq 0$, $i = 1..4$. Бирок (3.5.5) барабардыгынын сол жагында үчүнчү даражадагы көп мүчө. Алгебрадан белгилүү болгондой, (3.5.5) барабардыгы I аралыгында үчтөн көп эмес чекитте гана аткарылышы мүмкүн. Демек, $1, x, x^2, x^3$ функциялары I интервалында сызыктуу көз каранды эмес. Бул чыгарылыштан $1, x, x^2, x^3$ функциялары $I_1 = (a, b)$ каалаган аралыкта сызыктуу көз каранды эмес экендиги келип чыгат.

b) $exp(\lambda_1 x), exp(\lambda_2 x), exp(\lambda_3 x)$ системасы $I = (-\infty, \infty)$ интервалында сызыктуу көз каранды дейли. Анда

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} \equiv 0 \qquad (3.5.6)$$

теңдештиги $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ сандарынын жок дегенде бири нөлдөн айырмалуу болгондо аткарылат, мисалы $\alpha_3 \neq 0$ болсун дейли. (3.5.6) теңдештиктин эки жагын $e^{\lambda_1 x}$ ке бөлүп: $\alpha_1 + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3 e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} = 0$ гө ээ болобуз. Теңдештикти дифференциалдап,

$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} = 0$ барабардыгын алабыз. Акыркы теңдештиктин эки жагын $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ ке бөлүп, төмөнкүнү алабыз:

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \equiv 0. \qquad (3.5.7)$$

(3.5.7) ни дифференциалдап,

$\alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \equiv 0$ гө ээ болобуз. Мындай болушу мүмкүн эмес, анткени болжолдоо боюнча $\alpha_3 \neq 0$, шарт боюнча $\lambda_3 \neq \lambda_1$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$, ал эми $e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} \neq 0$. Демек, (3.5.6) теңдештиги $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ болгондо гана аткарылат, ошондуктан берилген система $(-\infty, \infty)$ интервалында сызыктуу көз каранды эмес.

c) $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{1} = \ln x \neq const$ болгондуктан, берилген функциялар $I = (0, +\infty)$ интервалында сызыктуу көз каранды эмес.

d) $$\alpha_1(4 - x) + \alpha_2(2x + 3) + \alpha_3(6x + 8) \equiv 0 \qquad (3.5.8)$$

теңдештиги $I = (-\infty; \infty)$ аралыгында орун алгандай жана бардыгы нөлгө барабар эмес $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ турактууларды табууга мүмкүн боло турганын көрсөтөлү. (3.5.8)ден төмөнкүнү алабыз

$$(-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3)x + (4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3) \cdot 1 \equiv 0. \qquad (3.5.9)$$

1 жана *x* функциялары *I* де сызыктуу көз каранды эмес болгондуктан, (3.5.9) теңдештиги төмөнкү шарттарда аткарылат:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

жана

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 6\alpha_3 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 = -8\alpha_3. \end{cases} \qquad (3.5.10)$$

α_1, α_2 ге карата (3.5.10) системасынын аныктагычы төмөнкүчө:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0.$$

Демек, (3.5.10) системасы каалагандай $\alpha_3 \neq 0$ үчүн тривиалдуу эмес чыгарылышка ээ. Ошондуктан берилген функциялар *I* де сызыктуу көз каранды болушат.

Эми (3.5.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышынын структурасы жөнүндөгү теореманы келтирели.

Теорема 3.5.1. Эгерде $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (3.5.2) теңдемесинин n айрым сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары болушса, анда алардын сызыктуу комбинациясы

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (3.5.11)$$

бул теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

Бул теореманын далилдөөсү экинчи тартиптеги теңдеме үчүн келтирилген теореманын далилдөөсүнө окшош (**§3.4.1°**ди карагыла) жана биз аны кээ бир жаңы түшүнүктөрдү киргизүүдөн кийин жүргүзөбүз.

Эскертүү. Эгерде $y_1, y_2, ..., y_n$ чыгарылыштары сызыктуу көз каранды болушса, анда жок дегенде алардын бирөөсү калган $n-1$ аркылуу сызыктуу туюнтулат жана (3.5.11) функциясы чындыгында n эмес, андан кичине сандагы турактуу чоңдуктардан көз каранды болот. Ал жалпы чыгарылышты бере албайт.

$y_1, y_2, ..., y_n$ айрым чыгарылыштарынын сызыктуу көз каранды эместигинин жөнөкөй шарты бар. $y_1, y_2, ..., y_n$ функцияларынан жана алардын туундуларынан түзүлгөн Вронскийдин аныктагычы (же вронскиан) деп аталган аныктагычтын нөлгө барабар эместиги:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3.5.12)$$

бул шарттын өзүн берет. Барабарсыздык белгиси, аныктагыч $I=(a,b)$ интервалындагы x тин эч кандай маанилеринде нөлгө барабар эмес дегенди билдирет. n - тартиптеги сызыктуу теңдеменин сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштарын чыгарылыштардын фундаменталдык системасын түзөт деп дагы айтылат.

$y_1, y_2, ..., y_n$ – төмөнкү теңдеменин фундаменталдык системасы болсун дейли

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0 .$$

Анда Остроградский-Лиувиллдин формуласы орун алат [13]

$$W(x) = W(x_0)exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\,dt), \qquad (3.5.13)$$

мында $W(x) = W(y_1, y_2, ..., y_n)$ – Вронскийдин аныктагычы, ал эми x_0 –теңдеменин $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$ коэффициенттери үзгүлтүксүз болгон $[a,b]$ кесиндисиндеги x тин каалагандай мааниси.

Остроградский-Лиувиллдин формуласынан Вронскийдин аныктагычы $[a,b]$ кесиндисинде же нөлгө теңдеш барабар же эч бир чекитте нөлгө айланбайт деген келип чыгат. Ошондой эле төмөнкү ырастоо да туура. (3.5.2) теңдемесинин $y_1, y_2, \ldots, y_n$ чыгарылыштары $I = (a,b)$ да сызыктуу көз каранды эмес болуусу үчүн $W(x) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ вронскианы $I = (a,b)$ интервалынын жок дегенде бир x_0 чекитинде нөлгө айланбашы зарыл жана жетиштүү.

Вронскийдин аныктагычы берилген баштапкы шарттар боюнча айрым чыгарылышты табууда маанилүү орунду ээлейт.

Жалпы чыгарылыштын структурасы жөнүндөгү теорема **3.5.1** ди далилдөө.

(3.5.2) теңдемесинин каалагандай айрым чыгарылышын (3.5.11) формуласынан $c_1, c_2, \ldots, c_n$ турактуу чоңдуктарынын кандайдыр бир маанилеринде аныкталган жалпы чыгарылышынан алууга мүмкүн болоорун далилдейли.

(3.5.2) теңдемесинин

$$y\big|_{x=x_0} = y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0} = y_0', \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (3.5.14)$$

баштапкы шартты канааттандырган $y = y(x)$ айрым чыгарылышын табуу керек. $y = y(x)$ функциясы (3.5.14) шартын канааттандыра тургандай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ турактуу чоңдуктарды тандап алабыз

$$\begin{cases} y_0 = c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \ldots + c_n y_{n0} \\ y_0' = c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' + \ldots + c_n y_{n0}' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = c_c y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + c_n y_{n0}^{(n-1)}. \end{cases} \qquad (3.5.15)$$

Мында x_0 чекитинде y_i айрым чыгарылышынын k - туундусунун мааниси $y_{i0}^{(k)}$ аркылуу белгиленген.

Бул системанын аныктагычы

$$W = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \dots & y_{n0} \\ y'_{10} & y'_{20} & \dots & y'_{n0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \dots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$x = x_0$ чекитиндеги Вронскийдин аныктагычынын маанисин берет. $y_1, y_2, \dots, y_n$ айрым чыгарылыштар фундаменталдык системаны түзгөндүктөн, бул аныктагыч каалаган x_0 чекитинде нөлдөн айырмалуу. Демек, (3.5.15) системасы жалгыз чыгарылышка ээ: $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$. Түзүү боюнча $y(x) = \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2 + \dots + \tilde{c}_n y_n$ чыгарылышы (3.5.14) баштапкы шарттарды канааттандырат, так ушуну далилдөө керек болчу.

Эскертүү. Талдоонун айрым учурун карайлы. $y_0 = y'_0 = \dots = y_0^{(n-1)} = 0$ нөлдүк баштапкы шартына $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ системанын нөлдүк (тривиалдык) чыгарылыш дал келет, б.а. (3.5.2) теңдемесин жана нөлдүк баштапкы шартын канааттандырган функция нөлгө теңдеш барабар.

n-тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес (3.5.1) теңдеменин жалпы чыгарылышы-(3.5.1) теңдемесинин кандайдыр бир айрым чыгарылышы жана ага дал келген (3.5.2) бир тектүү теңдемесинин жалпы чыгарылышынын суммасынан турат. Бул ырастоонун далилдөөсү, экинчи тартиптеги теңдемелер үчүн жүргүзүлгөнгө окшош.

Турактуу чоңдуктарды вариациялоо методу (§3.4.4^0) n дин каалаган тартибиндеги сызыктуу теңдемелер үчүн да колдонулат. Аны колдонуу үчүн дал келген бир тектүү теңдеменин фундаменталдык системасын гана билүү керек.

Мисал 3.5.2. Остроградский-Лиувиллдин формуласы колдонулган мисалды карайлы. Сызыктуу бир тектүү экинчи тартиптеги теңдеме берилсин

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

y_1 – ушул теңдеменин тривиалдуу эмес айрым чыгарылышы болсун дейли (мында $a_1(x), a_2(x)$ функциялары $I=(a,b)$ да үзгүлтүксүз жана каалагандай $x \in I$ үчүн $y_1 \neq 0$). Теңдеменин

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds)dx$$

жалпы чыгарылышын Абелдин формуласы аркылуу табууга болоорун далалдегиле. Мында c_1 жана c_2 – турактуу чоңдуктар.

Чыгаруу. $y_2(x)$ экинчи чыгарылышты табуу үчүн (3.5.13) формуласын колдонобуз:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = c_1 exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds).$$

Мындан $y_1 y_2' - y_2 y_1' = c_1 exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds)$. Акыркы барабардыктын эки жагын y_1^2 ($y_1 \neq 0$ I де) ке бөлүп, төмөнкүнү алабыз

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{c_1}{y_1^2} exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds).$$

$\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)' = \dfrac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2}$ экенин эске алып жана интегралдап

$$\frac{y_2}{y_1} = c_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\ ds)\ dx + c_2$$

ге ээ болобуз. Мындан Абелдин формуласын алабыз

$$y_2 = c_2 y_1 + c_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} exp(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\ ds)\ dx, \qquad (3.5.16)$$

мында c_1 жана c_2 – турактуу чоңдуктар. y_1 жана y_2 чыгарылыштары сызыктуу көз каранды эмес болгондуктан, Абелдин формуласы аркылуу чынында жалпы чыгарылыш аныкталат.

Мисал 3.5.3. $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0$ теңдемеси $y_1 = x^2$ айрым чыгарылышка ээ экени белгилүү.

$$y(1) = 1,\ y'(1) = 0 \qquad (3.5.17)$$

Коши маселесинин чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. (3.5.2) маселесинин натыйжасын колдонуп, берилген теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын табабыз. Теңдеменин y_1 менен сызыктуу көз каранды эмес чыгарылышы y_2 ни Абелдин формуласы аркылуу табабыз ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $x_0 = 1$):

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} exp(-\int_{x_0}^{x} \frac{2}{s} ds)\ dx = x^2 \int \frac{1}{x^4} x^{-2} ds = x^2 \left(\frac{x^{-5}}{-5} + \widetilde{c} \right) = \frac{1}{-5x^3},$$

мында $\widetilde{c} = 0$ деп тандадык.

Анда $y_1 = x^2, y_2 = -\frac{1}{5}x^{-3}$ функциялары чыгарылыштардын фундаменталдуу системасын түзүшөт. Теңдеменин $(0, +\infty)$ аралыгындагы жалпы чыгарылышы

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}$$

түрүнө ээ, (мында c_1, c_2 – туруктуу чоңдуктар). c_1 жана c_2 нин маанилерин (3.5.17) баштапкы шарттарды колдонуп табабыз: $c_1 + c_2 = 1,\ \ 2c_1 - 3c_2 = 0.$

Мындан $c_1 = \frac{3}{5}, c_2 = \frac{2}{5}$. Демек, (3.5.17) баштапкы шарттары менен берилген Коши маселесинин чыгарылышы төмөнкү түрдө болот

$$y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x^{-3}.$$

Эми берилген чыгарылыштардын фундаменталдык системасы аркылуу дифференциалдык теңдемени түзүү маселесин чечели. $I = (a, b)$ кесиндисинде сызыктуу көз каранды эмес n-тартипке чейин кошо бардык туундуларга ээ болгон

$$y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), \tag{3.5.18}$$

функциялардын системасын карайлы. Анда

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & ... & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{3.5.19}$$

(мында $y(x)$ – белгисиз функция) теңдемеси сызыктуу дифференциалдык теңдеме болот жана $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ функциялары анын чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөт. Эгерде аныктагычты акыркы мамычанын элементтери боюнча ажыратсак, анда (3.5.19) теңдемесиндеги $y^{(n)}(x)$ тин алдындагы коэффициент (3.5.18) системасынын $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ Вронскийдин аныктагычы болот жана ал нөлдөн айырмалуу. Алынган теңдеменин эки жагын Вронскианга бөлүп, (3.5.2) түрүндөгү теңдемени алабыз.

Мисал 3.5.4. $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$ функциялары чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы болгон дифференциалдык теңдемени түзгүлө.

Чыгаруу. (3.5.19) формуласын колдонобуз.

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{же} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Аныктагычты ачып, $y'' - y = 0$ гө ээ болобуз. Бул изделген дифференциалдык теңдеме.

Мисал 3.5.5. $y_1 = x,\ y_2 = x^3$ функциялары кандайдыр бир экинчи тартиптеги бир тектүү теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөөрүн текшергиле жана $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$ баштапкы шарттары менен ушул теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Вронскийдин аныктагычын табалы

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^3 - x^3 = 2x^3.$$

Демек, $y_1 = x,\ y_2 = x^3$ функциялары коэффициенттери $x \neq 0$ болгондо үзгүлтүксүз функциялар болгон экинчи тартиптеги бир тектүү сызыктуу теңдеменин чыгарылышынын фундаменталдык системасын түзүшөт. Бул теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө болот:

$y = c_1 x + c_2 x^3$, мында c_1, c_2 – турактуу чондуктар.

Коюлган Коши маселесин чыгарыш үчүн $y(1) = 2,\ y'(1) = 1$ баштапкы шарты аткарыла тургандай c_1 жана c_2 туруктуулардын маанилерин аныктоо зарыл.

$c_1 + c_2 = 2,\ c_1 + 3c_2 = 1$ болгондо, $c_1 = \frac{5}{2},\ c_2 = -\frac{1}{2}$ алабыз.

Ошондуктан берилген Коши маселесинин чыгарылышы төмөнкү түргө ээ

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^3.$$

Мисал 3.5.6. $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ функциялары кандайдыр бир үчүнчү тартиптеги бир тектүү сызыктуу теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөөрүн көрсөткүлө.

<u>Решение</u>. $W(y_1, y_2, y_3)$ тү табабыз:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} + e^x\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -2(xe^x - e^x) + e^x(2x^2 - x^2) = e^x\left[(x-1)^2 + 1\right] \neq 0, \forall x \in R.$$

Демек, берилген функциялар төмөнкү үчүнчү тартиптеги кандайдыр бир сызыктуу теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөт:

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0.$$

Мисал 3.5.7.

$$\frac{d^2y}{dx} + k^2y = f(x),\ k \neq 0 \qquad (3.5.20)$$

теңдемесинин $x = 0$ болгндо изделген функциянын жана анын туундусунун нөлдүк баштапкы маанилериндеги чыгарылышы:

$$y(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(s)\sin k(x-s)\,ds$$

түрүндө болоорун далилдегиле.

<u>Чыгаруу</u>. $\sin kx$ жана $\cos kx$ тиешелүү бир тектүү теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдуу системасы болгондуктан, (3.5.20) бир тектүү эмес теңдеменин чыгарылышын

$$y(x)=c_1(x)\cos kx+c_2(x)\sin kx \tag{3.5.21}$$

түрүндө издейбиз.

Турактуу чондуктарды вариациялоо методу боюнча c_1 жана c_2 белгисиз функцияларды аныктоо үчүн төмөнкү сиситеманы алабыз

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos kx+c_2'(x)\sin kx=0, \\ -k\,c_1'(x)\sin kx+k\,c_2'(x)k\,x\cos kx=f(x). \end{cases}$$

Бул системанын аныктагычы

$$W(\cos kx,\sin kx)=\begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{vmatrix}=k,\quad k\neq 0.$$

Крамердин эрежеси боюнча:

$$\begin{cases} c_1'(x)=\dfrac{1}{k}\begin{vmatrix} 0 & \sin kx \\ f(x)k & \cos kx \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{k}f(x)\sin kx \\ c_2'(x)=\dfrac{1}{k}\begin{vmatrix} \cos kx & 0 \\ -k\sin kx & f(x) \end{vmatrix}=\dfrac{1}{k}f(x)\cos kx. \end{cases}$$

Интегралдап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} c_1(x)=-\dfrac{1}{k}\int_0^x f(s)\sin ks\,ds+\tilde{c}_1 \\ c_2(x)=\dfrac{1}{k}\int f(s)\cos ks\,ds+\tilde{c}_2. \end{cases} \tag{3.5.22}$$

(3.5.22) ни (3.5.21)ге коюп, төмөнкүнү алабыз

$$y(x)=\tilde{c}_1\cos kx+\tilde{c}_2\sin kx+\frac{1}{k}\int_0^x(\sin kx\cos ks-\cos kx\sin ks)f(s)ds=$$

$$=\tilde{c}_1\cos kx+\tilde{c}_2\sin kx+\frac{1}{k}\int_0^x\sin k(x-s)f(s)ds.$$

Бул (3.5.20) тендемесинин жалпы чыгарылышы.

$y(0)=0$ шартынан $0=\tilde{c}_1\cdot 1$ ди алабыз, б.а. $\tilde{c}_1=0$. Алынган жалпы чыгарылышты дифференциалдап, $y'(x)=-k\,\tilde{c}_1\sin kx+k\,c_2'\cos kx$ ке ээ болобуз. $y'(0)=0$ шартынан $\tilde{c}_2=0$ келип чыгат. Анда изделген чыгарылыш төмөнкүчө болот

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_0^x f(s)\sin k(x-s)\,ds.$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№ 118. *Берилген функциялар өзүлөрү аныкталган областта сызыктуу көз каранды болоорун изилдегиле:*

а) $4, x$. г) $x, 2x, x^2$.

б) $\cos x, \sin x$. д) e^x, xe^x, x^2e^x.

в) $1, \cos x$.

№ 119. *Көрсөтүлгөн функциялар системасы үчүн Вронскийдин аныктагычын тапкыла.*

а) $1, x$; в) $1, 2, x^2$.

б) $x, \frac{1}{x}$. г) e^{-x}, xe^{-x}.

Берилген функциялар системасы чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзө турган дифференциалдык теңдемелерди түзгүлө.

№ 120. $y_1(x) = x,\ \ y_2(x) = e^x$.

№ 121. $y_1(x) = shx,\ y_2(x) = chx$, мында $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \ shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

№ 122. $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2$.

№ 123. $y_1(x) = x, y_2(x) = \sin x, y_3(x) = \cos x$.

№ 124. $y_1(x),\ \ y_2(x)$ *– экинчи тартиптеги бир тектүү дифференциалдык* $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ *теңдеменин чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы болсун.* $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ *коэффициенттерин* $y_1(x)$ *жана* $y_2(x)$ *аркылуу туюнткула.*

№ 125. *w га карата кандай шартта* $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos wx$ *теңдемесинин жалпы чыгарылышы кылымдык мүчөгө ээ болбойт?*

<u>Аныктама</u>. Мезгилдүү функция менен көз каранды эмес өзгөрмөнүн даражасынын көбөйтүндүсү түрүнө ээ болгон мүчө <u>кылымдык мүчө</u> деп аталат.

№ 126. k нын кандай маанилеринде

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = \cos 2x$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышы кылымдык мүчөгө ээ болбойт?

№ 127.

$$y'' - \frac{y'}{2x} - \frac{1}{x^2} y = 0$$

теңдемеси $y_1 = x^2$ *чыгарылышка ээ. Бул теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.*

§3.6. Туруктуу коэффициенттүү *n*-тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер

Туруктуу коэффициенттүү n-тартиптеги сызыктуу теңдеменин чыгарылышы экинчи тартиптеги теңдеменин чыгарылышына окшош табылат. Ошондуктан биз кыскача гана көрсөтмөлөргө токтолуп кетебиз.

n-тартиптеги бир тектүү теңдемени карайлы:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (3.6.1)$$

мында $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – чыныгы туруктуу сандар.

n- даражадагы

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

алгебралык теңдеме n- тартиптеги бир тектүү теңдеме үчүн <u>мүнөздөгүч теңдеме</u> деп аталат. Каалаган n тартип үчүн $n = 2$ болгондо алынган сүйлөмдү жалпылоочу төмөнкү сүйлөм орун алат

1) Мүнөздөгүч теңдеменин ар бир k - эселүү λ чыныгы тамырына $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ көрүнүштөгү k айрым чыгарылыш туура келет:
2) Мүнөздөгүч теңдеменин ар бир t эселүү комплекстүү - түйүндөш $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0$ тамырларына төмөнкү түрдөгү $2t$ айрым чыгарылыштар туура келет:

$$e^{\beta x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Бардык тамырлардын эселеринин жалпы суммасы мүнөздөгүч теңдеменин даражасы n ге барабар болушу керек, ошондуктан бардык айрым чыгарылыштардын саны теңдеменин тартиби менен дал келет.

Көрсөтүлгөн айрым чыгарылыштар сызыктуу көз каранды эмес экендигин, б.а. бул чыгарылыштар фундаменталдык системаны түзөөрүн биз далилдебейбиз. Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын табуу үчүн көрсөтүлгөн айрым чыгарылыштардын сызыктуу комбинациясын алуу керек.

Мисал 3.6.1. $y^{(IV)}+2y''+y=0.$

Чыгаруу. Мүнөздөгүч теңдеме $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$ же $(\lambda^2+1)^2=0$ түрүнө ээ.

Мындан $\lambda_1=\lambda_2=i$, $\lambda_3=\lambda_4=-I$. Ошондуктан берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы мындайча жазылат:

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x.$$

Бир тектүү эмес

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \qquad (3.6.2)$$

теңдеменин айрым чыгарылышын табуу, мында $f(x)=e^{\alpha x}[p_1(x)\cos\beta x+p_2(x)\sin\beta x]$, бир тектүү эмес экинчи тартиптеги теңдеме үчүн колдонулган эрежелер боюнча жүргүзүлөт (**§ 3.3.3⁰**).

Демек, (3.6.2) теңдемеси төмөнкү түрдөгү айрым чыгарылышка ээ экен:

$$y=x^ke^{\alpha x}\left[R_1(x)\cos\beta x+R_2\sin\beta x\right],$$

мында $R_1(x)$, $R_2(x)$ көп мүчөлөрү даражалары $p_1(x)$; $p_2(x)$ көп мүчөлөрүнүн жогорку даражасына барабар болгон көп мүчөлөр, ал эми k болсо $\alpha\pm i\beta$ нын мүнөздөгүч теңдеменин тамырларына кирген эселиги. Эгерде $\alpha\pm i\beta$ мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары болбосо, анда k ны нөлгө барабар деп алабыз. Эгерде теңдеменин оң жагы $f(x)$ көрсөтүлгөн түрдөгү функция болбосо, анда турактуу чоңдуктарды вариациялоо методун колдонуу керек.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү теңдемелердин жалпы чыгарылышын тапкыла:

№ 128. $y^{(V)}+y^{(IV)}+2y'''+2y''+y'+y=0.$

№ 129. $y'''-5y''+6y'=0.$

№ 130. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0, (\lambda_1 = 2)$.

№ 131. $y''' + y'' = 0$.

№ 132. *Айрым чыгарылыштардын түрүн аныктагыла (коэффициенттердин сандык маанилерин табуунун кажети жок):*

а) $y''' + y'' + y' + qy = 2$.

б) $y''' + 2y'' + y' = (2x + 12)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$.

в) $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$.

§ 3.7. Эйлердин дифференциалдык теңдемелери

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \ x \neq 0, \quad (3.7.1)$$

(мында a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ – турактуу сандар), түрүндөгү теңдеме Эйлердин теңдемеси деп аталат жана ал өзгөрмөлүү коэффициенттүү сызыктуу дифференциалдык теңдеменин айрым учуру болот. $x = e^t$ (эгерде $x>0$) же болбосо $x = e^{-t}$ (эгерде $x < 0$) ордуна коюунун жардамы менен жаңы t көз каранды эмес өзгөрмөнү киргизебиз. Тактык үчүн $x > 0$ болсун дейли. Анда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^t}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

ж.б., Эйлердин теңдемеси турактуу коэффициенттүү сызыктуу теңдемеге айланат.

Эскертүү.

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} (ax + b) \ y' + a_n y = f(x)$$

(мында $a, b, a_i (i = 1,2,\ldots,n) -$ турактуу сандар) түрүндөгү теңдеме да Эйлердин теңдемеси деп аталат жана $ax + b = e^t$ ($ax + b > 0$ областында) өзгөрмөсүн алмаштыруу менен турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу теңдемеге алып келинет. Эйлердин бир тектүү

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

теңдемесинин айрым чыгарылышын $y = x^{\lambda}$ түрүндө издөөгө болот. $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ үчүн туюнтмаларды Эйлердин бир тектүү теңдемесине коюп, λ нын даражасынын көрсөткүчтөрүн аныктоо үчүн мүнөздөгүч теңдемени табабыз. Мында, эгерде λ – мүнөздөгүч теңдеменин k эселүү чыныгы тамыры болсо, анда ага k сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары $x^{\lambda}, x^{\lambda}\ln x, x^{\lambda}(\ln x)^2, \ldots, x^{\lambda}(\ln x)^{k-1}$ туура келет, эгерде $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – t эселүү комплекстүү түйүндөш болсо, анда ага t түгөй сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштар дал келет

$$x^{\alpha} \cos(\beta \ln x), x^{\alpha} \ln x \cos(\beta \ln x), \ldots, x^{\alpha} (\ln x)^{t-1} \cos(\beta \ln x),$$

$$x^{\alpha} \sin(\beta \ln x), x^{\alpha} \ln x \sin(\beta \ln x), \ldots, x^{\alpha} (\ln x)^{t-1} \sin(\beta \ln x),$$

Мисал 3.7.1. Эйлердин

$$x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0 \qquad (3.7.2)$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Биринчи ыкма. $x = e^t$, $x > 0$ дейли. Анда

$$y'_x = e^{-t} y'_t \; , \; y''_x = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t) .$$

(3.7.2) теңдемесинен төмөнкүнү алабыз

$$e^{2t} e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t) - 3e^t e^{-t} \cdot y'_t + 5y = 0 \text{ же } y''_{tt} - 4y'_t + 5y = 0 .$$

Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ жана теңдеменин жалпы чыгарылышы $y = e^{2t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ түрдө болот. Бирок, $x = e^t$ болгондуктан, $y = x^2 (c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x)$ болот. Эгерде $x < 0$ учурун эсепке алсак, анда жалпы чыгарылышты

$$y = x^2 (c_1 \cos \ln |x| + c_2 \sin \ln |x|)$$

түрүндө жазууга болот.

Экинчи ыкма. Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышын $y = x^{\lambda}$, мында λ – белгисиз сан, түрүндө издейли. $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda-2}$ ни табабыз. Анда теңдемеге коюп,

$$x^2 \lambda (\lambda - 1) x^{\lambda-2} - 3x\lambda x^{\lambda-1} + 5x^{\lambda} = 0$$

же $x^{\lambda} [\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 5] = 0$ ду алабыз.

Бирок, $x^{\lambda} \neq 0$ болгондуктан, $\lambda(\lambda-1)-3\lambda+5=0$, же $\lambda^2-4\lambda+5=0$ болот. Бул теңдеменин тамырлары: $\lambda_1=2+i$, $\lambda_2=2-i$. Аларга төмөнкү чыгарылыштардын фундаменталдык системасы туура келет:

$$y_1 = x^{\lambda_1} = x^2 \cos \ln |x|; \quad y_2 = x^{\lambda_2} = x^2 \sin \ln |x|.$$

Демек, жалпы чыгарылыш төмөнкү түрдө болот:
$y = x^2 (c_1 \cos \ln |x| + c_2 \sin \ln |x|)$.

Мисал 3.7.2. Берилген

$$(x+2)^2\, y'' - 4(x+2)\, y' + 6y = 0$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> $y=(x+2)^{\lambda}$ десек, анда $y' = \lambda(x+2)^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)(x+2)^{\lambda-2}$. y, y', y'' туюнтмаларды берилген теңдемеге коюп, тамырлары $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ болгон $\lambda^2-5\lambda+6=0$ мүнөздөгүч теңдемени алабыз. Демек, жалпы чыгарылыш $y = c_1(x+2)^2 + c_2(x+2)^3$ функциясы болот.

$$y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x\, y' + a_n y = = x^{\alpha} p_m(\ln x),$$

(мында $p_m(u)$ – даражасы m болгон көп мүчө), түрүндөгү Эйлердин бир тектүү эмес теңдемесин оң жагы $e^{\alpha x} p_m(x)$ түрдө болгон турактуу коэффициенттүү бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын тандоо методуна окшош чыгарса болот.

Мисал 3.7.3. Эйлердин

$$x^2 y'' + xy' - 4y = x \ln x$$

теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> Мүнөздөгүч $\lambda(\lambda-1)+\lambda-4=0$, $\lambda^2-4=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$ теңдемеси тамырларына ээ. Ошондуктан тиешелүү бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы $\bar{y} = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$ болот. Айрым чыгарылышты $\tilde{y} = x(A \ln x + B)$ түрүндө издейли.

Төмөнкүнү алабыз

$$\tilde{y}' = A \ln x + B + A, \quad \tilde{y}'' = A / x.$$

Баштапкы теңдемеге коюп,
$Ax + + x(A \ln x + B + A) - 4x(A \ln x + B) = x \ln x$, же $-3Ax \ln x + 2Ax - 3Bx = x \ln x$ ти алабыз. Мындан $A = -1/3, B = -2/9$.

Демек, $\tilde{y} = -x((1/3)\ln x + 2/9)$. Жалпы чыгарылышы $y = c_1x^2 + c_2x^{-2} - (1/9)\times(3\ln x + 2)$ болот.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Эйлердин сызыктуу теңдемесинин жалпы чыгарылышын тапкыла:

№ 133. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0.$ № 134. $x^2y'' + xy' - (1/4)y = 0.$

№ 135. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$ № 136. $x^2y'' + y = 0.$

№ 137. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x.$ № 138. $x^2y'' - xy' + 2y = x\ln x.$

§3.8. Четтик маселелер

Жөнөкөйлүк үчүн экинчи тартиптеги теңдемени карайлы

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x). \qquad (3.8.1)$$

$a_1(x)$ жана $a_2(x)$ коэффициенттерин кандайдыр бир (a, b) интервалында үзгүлтүксүз деп эсептейбиз. Анда (3.8.1) теңдемесинин ар бир чыгарылышы бардык бул интервалда аныкталат.

Баштапкы шарттын берилиши (3.8.1) теңдемесинин чыгарылышынын чексиз көптүгүнөн керектүү айрым чыгарылышты тандап алууга мүмкүндүк берет (Коши маселеси) (**§3.1** карагыла).

(3.8.1) теңдемелер үчүн $y\big|_{x=x_1} = y_1$, $y\big|_{x=x_2} = y_2$ четтик (чектик) шартты берүү жолу менен айрым чыгарылыш ажыратылат.

Математикалык физикадагы теңдемелер курсунда мындан жалпы маселелер кездешет.

Мисал 3.8.1. $y\big|_{x=1} = 0$, $y\big|_{x=2} = 1$ четтик шарттарда $y'' = x$ теңдемесин чыгаргыла.

Чыгаруу. Теңдеменин жалпы чыгарылышы: $y=x^2/6+c_1x+c_2$ (**§3.1**ди кара).

Берилген шарттарды коюп, турактуу чоңдуктарды табуу үчүн эки теңдемеден турган системаны түзөбүз

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{4}{3} + 2c_1 + c_2 = 1. \end{cases}$$

Мындан, $c_1 = -1/6$, $c_2 = 0$ жана айрым чыгарылышы мындай: $y = x^2/6 - x/6$.

Мындан ары (3.8.1) теңдемесинин ордуна

$$[p(x)y']' + q(x)y = f(x), \quad p(x) > 0. \qquad (3.8.2)$$

теңдемесин карайбыз. (3.8.1) жана (3.8.2) теңдемелерин бири-бирине өзгөртүп түзсө болот. (3.8.2) түрүндөгү теңдемелер өзүнө-өзү <u>түйүндөш</u> деп аталышат.

(3.8.2) теңдемеси жана (a,b) интервалы үчүн четтик шарттарынын жалпы көрүнүшү төмөнкүчө:

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \qquad (3.8.3)$$

мында α_0, α_1, β_0, β_1 – бир убакытта нөлгө барабар эмес, берилген турактуу сандар. Эгерде $A=B=0$ болсо, анда четтик шарттар бир тектүү деп аталат. Мисалы

1) $y(a) = y(b) = 0$,

2) $\alpha_0 y(a) = y'(a)$, $y'(b) = -\beta y(b)$, $\alpha_0 \beta > 0$.

3) $y'(a) = y'(b) = 0$.

4) $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

Мисал 3.8.2. Четтик $y'' = 0$, $y(0) - y(\pi) = 1$, $y'(0) + y'(\pi) = 0$ маселесин чыгаргыла.

<u>Чыгаруу.</u> Берилген теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөнкү түргө ээ

$$y(x) = c_1 x + c_2,$$

мында c_1 жана c_2 – каалагандай турактуу сандар. Жалпы чыгарылыштан четтик шарттарды канааттандырган айрым чыгарылышты бөлүп алабыз:

$$\begin{cases} c_2 - (c_1\pi + c_2) = 1 \\ c_1 + c_1 = 0. \end{cases}$$

Бул система чыгарылышка ээ эмес. Демек, коюлган четтик маселе бир да чыгарылышка ээ эмес.

Мисал 3.8.3. Четтик маселени чыгаргыла

$$y'' - \lambda y = 0, \ y(0) = y(\pi) = 0 \ (\lambda - \text{параметр}).$$

<u>Чыгаруу</u>. Эгерде $\lambda = 0$ болсо, анда $y = c_1 x + c_2$ жана четтик шартты тривиалдуу чыгарылыш гана канааттандырат.

Эгерде $\lambda < 0$ болсо, анда $y'' - \lambda y = 0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышы $y = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}$. Ушул функциялардын ичинен берилген четтик шарттарды $y = 0$ канааттандырат.

Эгерде $\lambda > 0$ болсо, анда $y'' - \lambda y = 0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышы

$$y = c_1 \sin\sqrt{-\lambda}\, x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x.$$

Буларды четтик шарттарга коюп, $c_2 = 0$, $c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0$ ду алабыз.

Ошентип, берилген четтик маселе, эгерде $\sqrt{-\lambda}\,\pi = k\pi$, б.а. $\lambda = -k^2, k = 1,2,\ldots$ болсо нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот, б.а. λ тескери белгиси менен алынган k бүтүн санынын квадраты: $\lambda = -k^2$ болгон учурда гана четтик шарттар аткарылат. Тиешелүү чыгарылыштар $y_k = \sin kx$ функциялары болуп саналат.

3.8.3 мисалда көрсөткөндөй, эгерде q (3.8.2) теңдемесинде x тен эле эмес, λ параметринен да функция болсо, анда кандайдыр бир шарттарда (3.8.2) теңдемеси үчүн бир тектүү четтик маселе - нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болгон параметрдин маанилери табылат. λ нын бул маанилери - <u>өздүк маанилер</u> деп аталат, ал эми четтик маселенин аларга туура келген чыгарылыштары - <u>өздүк функциялар</u> деп аталат. Бул өздүк функциялар турактуу чоңдук болгон көбөйтүүчүсүнө чейинки тактыкта аныкталат.

$y'' - \lambda y = 0, \ y(0) = y(\pi) = 0$ четтик маселе үчүн $-1^2, -2^2, -3^2, \ldots$ сандары жана $\sin x, \ \sin 2x, \ldots$ функциялары маселенин өздүк маанилери жана өздүк функциялары болуп саналышат.

Качан гана λ_0 өздүк мааниге эки же андан көп сызыктуу көз каранды эмес өздүк функциялар жооп бергенде жөнөкөй өздүк маанилер менен катар (б.а. бир өздүк мааниге бир өздүк функция (туруктуу көбөйтүүчүсүнө чейинки тактыкта) жооп бергенде) эселүү өздүк маанилер жашайт.

Мисал 3.8.4. Төмөнкү четтик маселенин өздүк маанилерин жана өздүк функцияларын тапкыла

$$y'' + \lambda^2 y = 0 \quad (\lambda \neq 0), \tag{3.8.4}$$

$$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{3.8.5}$$

Чыгаруу. (3.8.4)теңдемесинин жалпы чыгарылышы:

$$y(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x . \tag{3.8.6}$$

Мындан

$$y'(x) = -c_1 \lambda \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x . \tag{3.8.7}$$

(3.8.6) да $x = \pi$ жана (3.8.7)де $x = 0$ деп жана (3.8.5) шарттарын эске алып, c_1 жана c_2 ни табуу үчүн төмөнкү бир тектүү сызыктуу системаны алабыз

$$\begin{cases} c_1 \cos \lambda\pi + c_2 \sin \lambda\pi = 0 \\ c_2 \lambda = 0. \end{cases} \tag{3.8.8}$$

(3.8.8) системасы анын аныктагычы нөлгө барабар болгондо

$$\begin{vmatrix} \cos \lambda\pi & \sin \lambda\pi \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } \lambda \cos(\lambda \pi) = 0$$

жана так ошондо гана нөлдүк эмес чыгарылышка ээ болот.

Шарт боюнча $\lambda \neq 0$, анда $\lambda \cos(\lambda \pi) = 0$ болот. Демек, өздүк маанилер төмөнкүгө барабар: $\lambda = \lambda_k = \dfrac{2k+1}{2}, k = 0,1,2,...$

Аларга туруктуу чоңдугу бирге барабар деп алган көбөйтүүчүсүнө чейин тактыкта өздүк маанилер туура келет:

$$y_k(x) = \cos \frac{2k+1}{2} x ,$$

жана алар (3.8.4)–(3.8.5) четтик маселенин чыгарылыштары болот.

Мисал 3.8.5. Четтик «пределдик» маселени чыгаргыла: $x^2 y'' + xy' - 4y = 0;\ y(1) = 1;$

$x \to 0$ да $y(x)$ функциясы чектелет.

Чыгаруу. Берилген теңдеме Эйлердин теңдемеси болуп саналат. Анын жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө болот

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

(**3.7.3** мисалды карагыла). $x \to 0$ да $y(x)$ чыгарылышы шарт боюнча чектелген болушу керек. Эгерде жалпы чыгарылышта $c_2 = 0$ деп алсак, бул талап аткарылат. Анда $y(x) = c_1 x^2$ ны алабыз. $y(1) = 1$ четтик шарты $c_2 = 0$ экенин берет. Демек, изделген чыгарылыш: $y(x) = x^2$.

Аныктама. $x \in [a,b]$, $s \in (a,b)$ болгондо аныкталган жана ар бир фиксирленген $s \in (a,b)$ үчүн төмөнкү касиеттерге ээ болгон $G(x,s)$ функциясын (3.8.2), (3.8.3) бир тектүү четтик маселесинин Грин функциясы деп атайбыз:

1) $x \neq s$ болгондо, $G(x,s)$ функциясы төмөнкү теңдемени канааттандырат

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0; \tag{3.8.9}$$

2) $x = a$, $x = b$ чекиттеринде $G(x,s)$ функциясы (3.8.3) четтик шарттарды канааттандырат;

3) $x = s$ болгондо, $G(x,s)$ функциясы x боюнча үзгүлтүксүз, ал эми анын туундусу биринчи түрдөгү үзгүлтүккө учурайт жана анын секирими $\frac{1}{p(s)}$ ге барабар, б.а.

$$G(s+0,s) = G(s-0,s),\ G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}. \tag{3.8.10}$$

(3.8.2), (3.8.3) четтик маселенин Грин функциясын табуу үчүн тиешелүү түрдө биринчи жана экинчи (3.8.3) четтик шартын канааттандырган (3.8.9) бир тектүү теңдеменин ($y(x) = 0$ дон айырмалуу) $y_1(x)$, $y_2(x)$ эки чыгарылышын табуу керек.

Эгерде $y_1(x)$ бир убакта эки четтик шартты канааттандырбаса, анда Грин функциясы $G(x, s)$ жашайт жана аны төмөнкү түрдө издөөгө болот:

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s)\,y_1(x), a\le x\le s,\\ \psi(s)\,y_2(x)\;,\; s\le x\le b,\end{cases} \tag{3.8.11}$$

мында $\varphi(s)$ жана $\psi(s)$ функциялары (3.8.10) шартын канааттандыргандай тандалат,б.а.

$$\psi(s)y_2(s)=\varphi(s)y_1(s),\quad \psi(s)y_2{}'(s)-\varphi(s)y_1{}'(s)=\frac{1}{p(s)}.$$

Эгерде Грин функциясы G(x,s) табылса, анда (3.8.2), (3.8.3) четтик маселенин чыгарылышы төмөнкү формула аркылуу аныкталат $[14]$:

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)f(s)ds.$$

Мисал 3.8.6.
$y''=f(x), y(-1)=y(0)=0,\ -1\le x\le 0$ четтик маселе үчүн Грин функциясын тургузгула.

<u>Чыгаруу.</u> $y''=0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышы: $y=c_1+c_2x$. $y(-1)=0$ шартын, мисалы $y_1(s)=1+x$ чыгарылышы, ал эми экинчи четтик шартты $y_2(x)=x$ чыгарылыш канааттандырат.

(3.8.11) формуласын колдонобуз

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s)(1+x), & -1\le x\le s,\\ \psi(s)x, & s\le x\le 0,\end{cases}$$

мында $\varphi(x)$ жана $\psi(x)$ функциялары

$$\begin{cases}\psi(s)s=\varphi(s)(1+s),\\ \psi(s)-\varphi(s)=1\end{cases}$$

шарттарынан аныкталат. Мында $\varphi(s)=s,\ \psi(s)=(1+s)$. Ошентип, изделген Грин функциясы төмөнкү түрдө болот

$$G(x,s)=\begin{cases}(1+x)s, & -1\le x\le s,\\ x(1+s), & s\le x\le 0.\end{cases}$$

G(x,s) функциясын түзүп, берилген четтик маселенин чыгарылышын төмөнкүдөй жазабыз:

$$y(x) = \int_{-1}^{0} G(s,x)f(s)ds = x\int_{-1}^{x}(1+s)f(s)ds + (1+x)\int_{x}^{0} sf(s)ds\,.$$

Чындыгында, дифференциалдап төмөнкүнү алабыз

$$y' = x(1+x)f(x) - (1+x)xf(x) + \int_{-1}^{x}(1+s)ds + \int_{x}^{0} s\, f(s)ds.$$

Мындан дагы бир жолу дифференциалдап төмөнкүгө ээ болобуз

$$y'' = x(1+x)f(x) - xf(x) = f(x).$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Четтик маселелерди чыгаргыла:

№ 139. $y'' - y' = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

№ 140. $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \alpha.$

№ 141. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0), \quad y'(\pi) = e^{\pi}.$

№ 142. $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

№ 143. $xy'' + y' = 0, \quad y(1) = \alpha\, y'(1), \quad y(x)$ *функциясы* $x \to 0$ *учурда чектелген.*

№ 144. $y'' + (\lambda - w^2)y = 0, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1).$

$\lambda - w^2 < 0,\ \ \lambda - w^2 = 0, \quad \lambda - w^2 > 0$ *учурларын карагыла.*

№ 145. *Четтик маселенин өздүк маанилерин жана өздүк функцияларын тапкыла*

$$y'' = \lambda y,\ y'(0) = y(l) = 0,\ l > 0.$$

№ 146. *Жалпыланган четтик маселе үчүн Грин функциясын тургузгула*

$y'' - y = f(x),\ \ y(x)$ *бардык* $x \in (-\infty, \infty)$ *да чектелген.*

№ 147. *Четтик маселе үчүн Грин функциясын тургузгула*

$$y'' = f(x),\ y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ 0 \le x \le 1\,.$$

§ 3.9. Даражалуу катарлардын жардамы менен интегралдоо

Бул параграфта теңдеменин коэффициенттери аналитикалык функциялар болгон учур үчүн, б.а. даражалуу катарлар түрүндө берилсе, анда даражалуу катарлар теориясынын жардамы менен дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун методдорун көрсөтөбүз.

1^0. Чыгарылышты даражалуу катарга ажыратуу

Экинчи тартиптеги

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (3.9.1)$$

теңдеменин мисалында даражалуу катарлар теориясынын колдонулушун көргөзөбүз. Мында a_1 жана a_2 төмөнкү даражалуу катарларга ажыратылат:

$$a_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r x^r, \quad a_2(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r x^r. \qquad (3.9.2)$$

Чыгарылышты ушундай эле даражалуу катар түрүндө издейли

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r. \qquad (3.9.3)$$

c_i коэффициенттери аныкталбаган коэффициенттер методу аркылуу табылат. y, y', y'' маанилерин (3.9.1) теңдемесине коюп жана x тин бирдей даражаларындагы коэффициенттерди нөлгө барабарлап, c_i коэффициенттерин аныктоо үчүн рекурренттүү теңдемелерди алабыз:

$$\begin{array}{c|c}
x^0 & 2\cdot 1\cdot c_2 + p_0c_1 + q_0c_0 = 0, \\
x^1 & 3\cdot 2\cdot c_3 + 2p_0c_2 + p_1c_1 + q_0c_2 + q_1c_0 = 0, \\
x^2 & 4\cdot 3\cdot c_4 + 3p_0c_3 + 2p_1c_2 + p_2c_1 + q_0c_1 + q_1c_1 + q_2c_0 = 0,
\end{array} \qquad (3.9.4)$$

(3.9.4) теңдемесинин ар бир кийинки теңдемеси алдынкысынан бир изделүүчү коэффициентти ашыгыраак кармайт. c_0 жана c_1 коэффициенттери каалагандай сан боюнча кала берет жана эркин туруктуу чоңдуктардын ролун аткарат. (3.9.4) теңдемелердин биринчиси c_2 ни берет, экинчиси c_3 тү, үчүнчүсү c_4 тү ж.б.у.с.

Жалпысынан $c_0, c_1, \ldots, c_{r+1}$ ди билип, $(r+1)$-теңдемесинен c_{r+2} ни аныктоого болот.

$y_1(x)$, $y_2(x)$ эки айрым чыгарылышты алуу үчүн, $y_1(x)$ үчүн $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ маанилерин, ал эми $y_2(x)$ үчүн $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ маанилерин кабыл алабыз, булар

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0\ ,\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$$

баштапкы шарттары менен тең күчтө болот. Ал (3.9.1) теңдемесинин ар кандай башка чыгарылышы $y_1(x)$, $y_2(x)$ чыгарылыштарынын сызыктуу комбинациясы болот.

Эгерде баштапкы шарттар $y(0) = A$, $y'(0) = B$ түрүнө ээ болсо, анда

$$y = Ay_1(x) + By_2(x).$$

Төмөнкү теорема орун алат [7]:

Теорема 3.9.1. Эгерде (3.9.2) катарлары $|x| < d_0$ болгондо жыйналышса, анда жогоруда көрсөтүлгөн ыкма боюнча түзүлгөн (3.9.3) даражалуу катары x тин ушул эле маанилеринде жыйналат жана (3.9.1)дин чыгарылышы болот.

Айрым учурда, эгерде $a_1(x)$ жана $a_2(x)$ – x тен көп мүчө болсо, анда (3.9.3) катары x тин каалагандай маанилеринде жыйналат.

Мисал 3.9.1.

$$y'' + xy = 0 \tag{3.9.5}$$

теңдемесинин чыгарылыштарын даражалуу катар түрүндө тапкыла. (3.9.5) теңдемеси Эйри теңдемеси деп аталат жана математиканын ар кандай колдонулуштарында, ошонун ичинен, кванттык механикада кездешет.

(3.9.5) теңдемеси өзгөрүлмөлүү коэффициенттүү экинчи тартиптеги эң жөнөкөй теңдеме болуп саналат, бирок аны элементардык методдор менен чыгарууга мүмкүн эмес.

Чыгаруу. (3.9.5) теңдемесинин чыгарылышын (3.9.3) катар түрүндө издейли.

Анда

$$y'(x) = \sum_{r=1}^{\infty} rc_r x^{r-1},\quad y'' = \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)\cdot c_r x^{r-2}.$$

(3.9.5) ге y, y', y'' үчүн жогорку туюнтмаларды коюп, төмөнкүнү алабыз

$$\sum_{r=2}^{\infty} c_r r(r-1)x^{r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{r+1} = 0.$$

Эми x тин бирдей даражаларынын алдындагы коэффициенттерин барабарлап, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & c_2 \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad \text{мындан} \quad c = 0, \\ x^1 & c_3 \cdot 3 \cdot 2 + c_0 = 0; \quad \text{мындан} \quad c_3 = -\dfrac{c_0}{3 \cdot 2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{r-2} & c_i r(r-1) + c_{r-3} = 0; \quad \text{мындан} \quad c_\kappa = -\dfrac{c_{r-3}}{r(r-1)}. \end{array} \qquad (3.9.6)$$

(3.9.6) дан көрүнүп тургандай

1) c_{3l} түрүндөгү коэффициенттери c_0 аркылуу аныкталат:

$$c_{3l} = -\frac{1}{3l(3l-1)} c_{3\,l-3} = \cdots = \frac{(-1)^l}{3l \cdot (3l-1) \cdots 3 \cdot 2} c_0,$$

c_0 дун өзү аныкталбай калат;

2) $c_{3\,l+1}$ коэффициенттер c_1 аркылуу аныкталат:

$$c_{3\,l+1} = \frac{(-1)^l}{(3l+1) \cdot 3l \cdots 4 \cdot 3} c_1,$$

c_1 өзү аныкталбай калат;

3) $c_{3\,l+2}$ коэффициенттери c_2 аркылуу аныкталат:

$$c_{3\,l+2} = \frac{(-1)^l}{(3l+2) \cdot (3l+1) \cdots 5 \cdot 4} c_2 = 0,$$

себеби $c_2 = 0$;

$c_0 = 1, c_1 = 0$ деп алсак, төмөнкү катарды алабыз

$$y_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{3l} x^{3l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{3l\,(3l-1) \cdots 3 \cdot 2} \cdot x^{3l}.$$

Тескерисинче, $c_0 = 0, c_1 = 1$ деп алсак, төмөнкү катарды алабыз

$$y_2(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{3l+1}\, x^{3\,l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(3l+1)3l \cdots 4 \cdot 3} \cdot x^{3l+1}.$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$ үчүн алынган катарлардын жыйналуучулугун каалагандай x үчүн мисалы Даламбердин белгиси боюнча оңой эле аныктаса болот. Ошентип, $y_1(x)$ жана $y_2(x)$ бардык $(-\infty,+\infty)$де аныкталган жана ал жогоруда айтылган теореманы толук иллюстрациялайт.

2^0. Чыгарылышты жалпыланган даражалуу катарга ажыратуу. Бесселдин теңдемеси

Аныктама.

$$x^{\rho}\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r \quad (c_0 \neq 0), \tag{3.9.7}$$

түрүндөгү катар, мында ρ – берилген сан; ал эми даражалуу катар $\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r$ кандайдыр бир $|x| < d_0$ областында жыйналат, жалпыланган даражалуу катар деп аталат.

Эгерде ρ бүтүн терс эмес сан болсо, анда жалпыланган даражалуу (3.7.9) катары кадимки даражалуу катарга айланат.

Аныктама. $\varphi(x)$ функциясы $|x - x_0| < d_0$ областында жыйналуучу даражалуу катар

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r (x - x_0)^r$$

түрүндө көрсөтүлсө, анда $\varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинин кандайдыр бир $|x - x_0| < d_0$ аймагында голоморфтуу деп аталат.

Аныктама. Эгерде $a_1(x), a_2(x)$ коэффициенттери x_0 чекитинде голоморфтуу болушса, анда x_0 чекити (3.9.1) дифференциалдык теңдемесинин кадимки чекити деп аталат; андай болбосо, x_0 чекити (3.9.1) дифференциалдык теңдемесинин өзгөчө чекити деп аталат.

Теорема 3.9.2. Эгерде $x = 0$ чекити (3.9.1) теңдемесинин өзгөчө чекити, теңдеменин $a_1(x)$ жана $a_2(x)$ коэффициенттери

$$a_1(x) = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} p_r x^r}{x}, \quad a_2(x) = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} q_r x^r}{x^2},$$

түрүндө болушса (мында алымындагы катарлар кандайдыр бир $|x| < d_0$ аймагында жыйналышат, ал эми p_0, q_0, q_1 коэффициенттери бир эле учурда нөлгө барабар эмес болушат), анда (3.9.1) теңдемеси жалпыланган даражалуу катар

$$y = x^{\rho} \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r \quad (c_0 \neq 0) \tag{3.9.8}$$

түрүндөгү жок дегенде бир чыгарылышка ээ жана дагы бул чыгарылышка кирген даражалуу катар эң жок дегенде эле $|x| < d_0$ областында жыйналат.

ρ көрсөткүчүн жана c_r коэффициенттерди аныктоо үчүн (3.9.1) теңдемесине (3.9.8) катарын коюп, x^{ρ} го кыскартып жана x тин ар түрдүү даражаларындагы коэффициенттерин нөлгө барабарлаш керек (аныкталбаган коэффициенттер методу).

Мында ρ саны $x = 0$ өзгөчө чекитинде аныктоочу деп аталган теңдемеден табылат:

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0, \tag{3.9.9}$$

мында $p_0 = \lim\limits_{x \to 0} x a_1(x)$, $q_0 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 a_2(x)$.

(3.9.9) аныктоочу теңдеменин ρ_1 жана ρ_2 тамырлары ар түрдүү болгон учурда (3.9.1) теңдемеси (3.9.8) түрүндөгү чыгарылышка дайыма ээ, мында ρ_1 жана ρ_2 тамырларынын чоң чыныгы бөлүккө ээ болгонун ρ деп алабыз. Эгерде ρ_1 ушул тамыр болсо, анда чыгарылыш төмөнкү түргө ээ:

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(1)} x^r \quad \left(c_0^{(1)} \neq 0\right).$$

Эгерде $\rho_1 - \rho_2$ айырмасы бүтүн санга же нөлгө барабар болбосо, анда ρ_2 экинчи тамырга туура келген чыгарылыш төмөнкү даражалуу катар түрүндө жашайт:

$$y_2 = x^{\rho_2} \sum_{r=0}^{\infty} c_r^{(2)} x^r \quad \left(c_0^{(2)} \neq 0\right).$$

Эгерде $\rho_1 - \rho_2$ бүтүн оң сан же нөл болсо, анда экинчи айрым чыгарылыш же (3.9.8) түрүн алат, же болбосо жалпыланган даражалуу катар менен кандайдыр бир жалпыланган даражалуу катардын $\ln x$ ке болгон көбөйтүндүсүнүн суммасынан турат:

$$y_2 = x^{\rho_2} \sum_{r=0}^{\infty} c_k^{(2)} x^k + A y_1 \ln x. \tag{3.9.10}$$

Эскертүү. (3.9.10) догу A турактуусу нөлгө барабар болушу мүмкүн, анда y_2 үчүн жалпыланган даражалуу катар түрүндө туюнтма алабыз.

Мисал 3.9.2. Бесселдин

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0 \tag{3.9.11}$$

теңдемесин ν бүтүн сан эмес болгон учурда чыгаргыла.

Чыгаруу. Жалгыз өзгөчө чекит $x = 0$. Ушул чекитке туура келген аныктоочу теңдеме: $\rho(\rho - 1) + \rho - \nu^2 = 0$. Мындан $\rho_1 = \nu$, $\rho_2 = -\nu$. Бесселдин (3.9.11) теңдемесинин биринчи айрым чыгарылышын жалпыланган даражалуу катар түрүндө издейли:

$$y = x^\nu \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r \quad (c_0 \neq 0)$$

(3.9.11) теңдемесине y, y', y'' ди коюп, төмөнкүнү алабыз

$$x^2 \sum_{r=0}^{\infty} c_r (r+\nu)\cdot(r+\nu-1) x^{r+\nu-2} +$$

$$+ x \sum_{r=0}^{\infty} c_r (r+\nu)\cdot x^{r+\nu-1} + \left(x^2 - \nu^2\right)\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{r+\nu} = 0.$$

Же жөнөкөй өзгөртүүлөрдөн жана x^ν ге кыскартуудан кийин:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[(r+\nu)^2 - \nu^2\right] c_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{r+2} = 0.$$

Бул барабардык теңдеш түрдө аткарылышы үчүн коэффициенттери

$$\left(\nu^2 - \nu^2\right)c_0 = 0, \; \left[(\nu+1)^2 - \nu^2\right] c_1 = 0 \tag{3.9.12}$$

теңдемелерин канааттандыруусу керек.

Булардын биринчиси теңдеш аткарылат. Ал эми экинчиден $c_1 = 0$ ду алабыз жана $r = 2, 3, \ldots$ үчүн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$c_r = -\frac{c_{r-2}}{r(2\nu + r)}.$$

Мындан бардык $m = 0, 1, 2, \ldots$ үчүн $c_{2m+1} = 0$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (\nu + 1)},\quad c_4 = \frac{c_0}{2^4 \cdot 2!(\nu + 1)(\nu + 2)}, \ldots,$$

$$c_{2r} = \frac{(-1)^r c_0}{2^{2r} \cdot r!(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + r)}.$$

Ошентип, бардык c_r коэффициенттер табылды, демек

$$y_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r c_0}{2^{2r} \cdot r!(\nu + 1)(\nu + 2)\ldots(\nu + r)} \cdot x^{2r+\nu}.$$

Даламбердин белгисин колдонуп, бул катардын каалагандай чектүү $[0; a]$ аралыкта бир калыпта жыйналышына ынанууга болот. Демек, $y_1(x)$ функциясы каалагандай c_0 үчүн Бесселдин (3.9.11) теңдемесинин чыгарылышы болот. c_0 үчүн төмөнкү санды алуу ыңгайлуу

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu + 1)},$$

мында $\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha - 1} dx,\ \alpha > 0$$

формула менен аныкталган Эйлердин белгилүү гамма-функциясы. $\Gamma(\nu + 1) = \nu\Gamma(\nu)$ болгондуктан, $y_1(x)$ ти төмөнкү түрдө көрсөтөбүз:

$$y_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{c_0 \cdot 2^\nu}{r!(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\kappa+\nu} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2^\nu}{2^\nu \cdot r! J(\nu + 1) \cdot (\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(\nu + r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}.$$

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\,\Gamma(\nu + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu} \qquad (3.9.13)$$

функциясы Бесселдин ν-тартиптеги биринчи түрдөгү функциясы деп аталат.

Бесселдин (3.9.11) теңдемесинин экинчи айрым чыгарылышын төмөнкү түрдө издейли:

$$y_2 = x^{-\nu}\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r .$$

(3.9.11) теңдемеси ν нын жуп даражасын камтыгандыктан, ν ны $-\nu$ га алмаштырууда өзгөрбөйт. Ошондуктан y_2 чыгарылышы ν ну - ν га алмаштыруу жолу менен (3.9.13) чыгарылышынан алынаары ачык көрүнүп турат.

Демек, $$J_{-\nu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(r+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-\nu} .$$

Бул функцияны Бесселдин тескери тартиптеги биринчи түрдөгү функциясы деп аташат.

Ошентип, эгерде ν бүтүн сан болбосо, анда Бесселдин (3.9.11) теңдемесинин бардык чыгарылыштары $J_\nu(x)$ жана $J_{-\nu}(x)$ функцияларынын сызыктуу комбинациялары болушат:

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x).$$

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Даражалуу катар түрүндө чыгарылыштардын фундаменталдык системасын тапкыла:

№ 148. $y'' - xy = 0$.

№ 149. $y'' + x^2 y = 0$.

№ 150. $y'' + xy' - (2x^2 + 1)y = 0$.

Бесселдин теңдемесинин жалпы чыгарылыштарын тапкыла:

№ 151. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

№ 152. $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$.

№ 153. $x^2y''+xy'+\left(k^2x^2-n^2\right)y=0,\ (k\neq 0)$ *теңдемесин көз карандысыз эмес өзгөрмөнү тийиштүү түрдө алмаштыруу жолу менен Бесселдин теңдемесине келтиргиле.*

§ 3.10. Термелүү теориясынан маселелер

1^0. Механикалык термелүүлөр

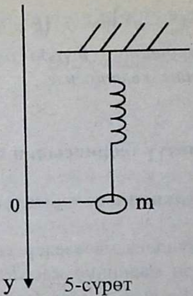
Термелүүлөр жөнүндөгү маселелер азыркы мезгилдеги техника менен физиканын эң маанилүү маселелеринин арасында орчундуу орунду ээлейт. Көпчүлүк учурларда термелүү кубулушу экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер (сызыктуу термелүүлөр) менен жазылат жана бул теңдемелер эң жөнөкөй учурларда турактуу коэффициентүү болушат. Алгач механикалык термелүүлөрдү карайбыз.

Шариктин координаталык ок катары каралган вертикалдык түз сызык боюнча болгон кыймылын карайлы. Бул координаталык октогу, шариктин өзүнүн салмагы менен пружинанын серпилгичтик күчү тең салмакта болуп кандайдыр башка күчтөр жок болгондогу кыймылсыз турган чекитти координата башталмасы O деп кабыл алабыз (5-сүрөт). Октун оң багытын төмөн көздөй багыттайбыз.

Эгерде шарикти O чекитинен жогору же төмөн көздөй кысып (керип) кое берсек, анда ал кыймылга келет.

y менен шариктин O чекитинен убакыттын t моменттиндеги четтеп кетүүсүн белгилейли: $y=y(t)$.

Биз шариктин O чектитинен болгон четтеп кетүүлөрү, пружинанын серпилгичтик күчүнө пропорциялуу болгон областтан чыкпай турган болуусуна гана жол беребиз. Мындай шартта, шарикти O чекитине кайтарып келүүчү пружинанын серпилгичтик күчү анын четтеп кетүүсүнө пропорционалдуу жана вертикаль боюнча жантаюуга карама – каршы багытталган. Чындыгында эле, эгерде шарик O дөн төмөн көздөй четтеп кетсе, анда y оң маанини кабыл алат, ал эми серпилгич күч жогору көздөй таасир кылат. Эгерде шарик O чекитинен жогору көздөй четтеп кетсе, анда y терс маанини кабыл алат, ал эми серпилгич күч төмөн көздөй багытталат.



5-сүрөт

Ошентип, бул серпилгич күчтүн вертикалдык окко болгон проекциясы төмөнкүдөй туюнтулат:

$$f_{серп} = -\alpha\, y.$$

Мында оң маанидеги турактуу сан α пружинанын серпилгичтигинен (табиятынан) көз каранды.

y' жана y'' шариктин вертикаль огуна болгон ылдамдыгынын жана ылдамдануусунун проекциялары болоорун эске сала кетели. Шарикке, анын кыймылына тоскоол болгон вертикалдык күч аракет кылып жана анын чоңдугу анын ылдамдыгына пропорционалдуу болсун. Бул күч кыймылдын ылдамдыгына карама-каршы багытталган, ошондуктан анын вертикалга болгон проекциясы төмөндөгүдөй туюнтулат:

$$f_{каршы} = -\beta\, y',$$

мында β – оң турактуу сан. α, β, турактуу сандары белгилүү деп эсептелет. Шариктин ылдамдыгынын жана ылдадамдануусунун жана ага таасир кылган күчтөрдүн векторлору вертикаль боюнча багытталгандыктан, шариктин кыймылынын теңдемесин түзүүдө, биз бул векторлордун арасындагы катыштардан түз эле алардын проекцияларынын катыштарына өтөбүз.

Ошентип, Ньютондун экинчи законунун негизинде шариктин кыймылынын теңдемеси төмөнкү түрдө болот:

$$my'' = f_{серп} + f_{каршы}, \text{ б.а. } my'' = -\alpha\, y - \beta\, y'$$

Же мындан

$$y'' + \frac{\beta}{m} y' + \frac{\alpha}{m} y = 0 .$$

$\frac{\alpha}{m} = \omega^2 \ (\omega > 0)$, $\frac{\beta}{m} = 2k$ белгилөөлөрүн киргизели. Анда кыймылдын теңдемеси

$$y'' + 2k\, y' + \omega^2 y = 0 \qquad (3.10.1)$$

түрүнө келет.

Бул теңдеме, шариктин вертикалдык түз сызык боюнча кыймылынын (биздин болжолдоолордогу) математикалык модели болот.

Шариктин кыймылынын конкреттүү законун аныктоо үчүн төмөнкү баштапкы шарттарды беребиз:

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0' .$$

$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$ мүнөздөгүч теңдемеси $-k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}$ тамырларына ээ.

Төмөнкү учурларды карайлы:

1) $\Delta = k^2 - \omega^2 < 0$.

Анда

а) $k = 0$ болсо

$$y(x) = y_0 \cos \omega t + \frac{y_0'}{\omega} \sin \omega\, t ; \qquad (3.10.2)$$

б) $k > 0$ болсо

$$y(x) = e^{-kt} \left(y_0 \cos \nu t + \frac{y' + k y_0}{\nu} \sin \nu t \right), \qquad (3.10.3)$$

мында $\nu = \sqrt{\omega^2 - k^2}$.

(3.10.2), (3.10.3) төн $k = 0$ болсо, материалдык чекит (шарик) Oy огу боюнча O чекитинин айланасында, мезгили

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

боюнча термелээри (гармониялык термелүү процесси), ал эми $k > 0$ болсо, ал O чекитинин айланасында мезгили $\frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - k^2}}$ болгон басаңдоочу термелүүнү жасаары келип чыгат. Термелүүлөрдүн амплитудасы экспоненциалдык закон боюнча кемийт.

2) $\Delta = k^2 - \omega^2 = 0$.

Анда

$$y(t) = e^{-kt}[y_0 + (y_0' + ky_0)t]. \tag{3.10.4}$$

(3.10.4) төн материалдык чекит убакыттын өтүшү менен O чекитине умтулаары келип чыгат. x(t) чоңдугу t нын бир гана маанисинде нөлгө айлана алгандыктан, кыймыл термелүүсү жок эле болот (басаңдоочу мезгили жок процесс)

3) $\Delta = k^2 - \omega^2 > 0$.

Анда

$$y(t) = \frac{y_0(k+v) + y_0'}{2v} e^{-(k-v)t} - \frac{y_0(k-v) + y_0'}{2v} e^{-(k+v)t}, \tag{3.10.5}$$

мында $k - v > 0,\ k + v > 0\ \ v = \sqrt{k^2 - \varpi^2} < k$.

$k - v > 0,\ k + v > 0$ болгондуктан, (3.10.5) тен материалдык чекит убакыттын өтүшү менен 0 гө умтулаары келип чыгат. Мындан мурункудай эле $y(t)$ чоңдугу t нын бир эле маанисинде нөлгө барабар боло алат. Ошондуктан кыймыл термелүүсү жок эле болот (өтүүчү мезгили жок процесс).

(3.10.1) теңдемесинин жалпы чыгарылышын

$$y = e^{-kt}(c_1 \cos vt + c_2 \sin vt)$$

түрүндө жазса болот, мында c_1, c_2 – каалагандай турактуу сандар, же **3.4.4** мисалынын негизинде:

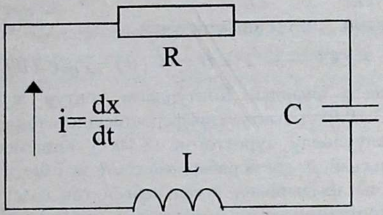
$$y = Ae^{-kt}\sin(vt + \varphi). \tag{3.10.6}$$

Мындан, (3.10.6) классын түзгөн кыймыл– бул жыштыгы γ, баштапкы фазасы φ жана өзгөрмө амплитудасы Ae^{-kt} болгон термелүү кыймылдары болоору көрүнүп турат.

Эгерде $k > 0$ болсо, анда Ae^{-kt} амплитудасы убакыттын өтүшү менен тез кемийт, ошондуктан $k > 0$ болгондо (3.10.6) классынын кыймылы басаңдоочу гармоникалык термелүү болуп саналат.

2^0. Электр чынжырындагы термелүүлөр

Электр чынжырында өтүүчү процесстердин сүрөттөлүштөрү механикалык термелүүлөргө толук окшош болот.



6-сүрөт

6-сүрөттө, үч удаалаш туташтырылган звено: активдүү R каршылык, өздүк индукциясы L болгон индуктивдүүлүк жана сыйымдуулугу C болгон коденсатор түзгөн электр чынжырынын схемасы келтирилген.

Сыйымдуулугу C болгон конденсатор каршылыгы R жана өздүк индукция коэффициенти L болгон чынжыр аркылуу разряддалат.

$V = V(t)$ конденсаторунун обкадкаларындагы чыңалуу болсун. Эгерде убакыттын баштапкы моментинде $V(t_0) = V_0$, ал ошол чынжырдагы токтун күчү $i(t_0) = I_0$ экени белгилүү болсо, анда $V = V(t)$ нын өзгөрүү законун табуу керек.

Электроникада берилген аныктама боюнча L, R, C чоңдуктар оң мааниге ээ. L, R, C - берилген турактуу чоңдуктар болсун. 6 – сүрөттө көрсөтүлгөн чынжырды жөнөкөй контур деп аташат жана контурдагы токтун багыты саат жебеси боюнча багытталат деп эсептешет. Кирхгоффтун законунун негизинде:

$$I = -CV', \tag{3.10.7}$$

$$V = RI + LI'. \tag{3.10.8}$$

(3.10.7) ни (3.10.8) ге коюп, $V = R(-CV') + L(-CV')'$ экенин алабыз же

$$V'' + 2KV' + w^2V = 0, \qquad (3.10.9)$$

мында $K = \dfrac{R}{2L}$, $w^2 = \dfrac{1}{LC}$.

Ошентип, $V(t)$ ны аныктоо үчүн

$$V'' + 2KV' + w^2V = 0, \quad V(0) = V_0, V'(0) = V_0'$$

Коши маселеси алынды. Контурдагы токтун агуу кубулушун сүрөттөгөн (3.10.9) сызыктуу дифференциалдык теңдемеси, механикалык термелүүлөрдү сүрөттөгөн (3.10.1) теңдемеси менен дал келет. Каршылык 0 гө барабар эмес $(R \neq 0)$ болгон учурда теңдеменин чыгарылышына туура келген ток сөзсүз басаңдоочу болот. Электротехникада ал өткөөл ток деп аталат. Механикалык термелүүлөргө болгон окшоштуктарды кеңитип, $\dfrac{R}{2L} < \sqrt{\dfrac{1}{CL}}$ болгон учурда бул ток чынжырдын (контурдун) өздүк термелүүсүн берет деп айта алабыз.

Эгерде $\dfrac{R}{2L} \geq \sqrt{\dfrac{1}{CL}}$ болсо, анда чынжырда термелүү болбойт, мында ток мезгилдүү эмес, басаңдоочу болот. Андан аркы майда – чүйдөсүнө биз киришпейбиз, себеби математикалык жактан караганда бул процесс механикалык термелүүлөр процессине окшош.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

№ 154*. *Математикалык маятник деп узундугу l болгон керилбес жипке илинген жана оордук күчүнүн таасири астында кыймылдаган массасы m болгон M материалдык чекитти айтабыз. Маятник вертикалдан кичине четтөөлөрдү жасайт (четтөө бурчунун синусу четтөө бурчуна дээрлик барабар) жана чөйрөнүн каршылыгы ылдамдыкка пропорционалдуу деп эсептеп, маятниктин кыймылынын законун тапкыла.*

№ 155*.*Пружинанын бир учу О чекитине кыймылсыз кадалган, ал эми экинчи учуна башка пружина аркылуу массасы 2m болгон жүк менен байланыштырылган массасы 3m болгон жүк бекитилген. Эки жүк тең x чоңдугуна* $F = a^2 \cdot m \cdot x$ *күчүнүн таасири астында кыймылдашат. Ситеманын мүмкүн болгон мезгилдүү кыймылдарын тапкыла.*

№ 156*. *Электр чынжыры удаалаш туташтырылган ЭКК* $e(t) = E \sin wt$ *болгон ток булагынан, L индуктивдүүлүгүнөн, R каршылыгынан жана C сыйымдуулугунунан турат жана дагы* $R^2C - 4L < 0, w \neq \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. *Эгерде* $I|_{t=0} = \frac{dI}{dt} = 0$ *болсо, анда чынжырдагы I тогун t убактысынан болгон функция катары карап тапкыла.*

№ 157*. *Электр чынжыры удаалаш туташтырылган ЭКК* $e(t) = E \sin wt$ *болгон ток булагынан, L индуктивдүүлүгүнөн, R каршылыгынан жана C сыйымдуулугунан турат жана дагы* $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ *(резонанс учуру). Эгерде* $I|_{t=0} = \frac{dI}{dt} = 0$ *болсо, анда чынжырдагы I тогу t убактысынан болгон функция катары карап тапкыла*

№ 158*. *k нын кандай маанилеринде* $y'' + 2ky' + y = 0$ *теңдемесинин бардык нөлдүк эмес чыгарылыштары басаңдоочу гармоникалык термелүүлөрдү көрсөтөт?*

§ 4.1. Негизги түшүнүктөр. Жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдемелер менен байланыш

Кээ бир процесстерди окуп үйрөнүүдө аларды жазып сүрөттөш үчүн бир эле функция жетишсиз болуп калганда дифференциалдык теңдемелер системасы менен кездешебиз.

Эгерде көз каранды эмес x өзгөрмөсү менен k даана $y_1(x),...,y_k(x)$ функцияны байланыштырган дифференциалдык теңдемелердин k системасы ушул функциялардын $y_1^{(p_1)}(x),...,y_k^{(p_k)}(x)$ жогорку туундуларына карата чечилген болсо, б.а.

$$\begin{cases} y_1^{(p_1)}(x) = f_1(x, y_1,..., y_1^{(p_1-1)},..., y_k,..., y_k^{(p_k-1)}) \\ y_2^{(p_2)}(x) = f_2(x, y_1,..., y_1^{(p_1-1)},..., y_k,..., y_k^{(p_k-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k^{(p_k)}(x) = f_k(x, y_1,..., y_1^{(p_1-1)},..., y_k,..., y_k^{(p_k-1)}), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

түрүндө ээ болсо, анда ал канondикалык деп аталат, мында $n = p_1 + p_2 + ... + p_k$ саны системанын тартиби деп аталат. (4.1.1) каноникалык система $p_1 = p_2 = ... = p_k = 1$ болгондо, б.а. 1-тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1,..., y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1,..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1,..., y_n), \end{cases} \quad (4.1.2)$$

системасы нормалдуу система деп аталат.

$x \in (a,b)$ ке карата (4.1.2)теңдемелер системасын теңдештикке айландырган жана (a,b)да үзгүлтүксүз дифференциалдануучу $y_i = \varphi_1(x),..., y_n = \varphi_n(x)$ функцияларынын жыйындысы

$a < x < b$ интервалында (4.1.2) системасынын чыгарылышы деп аталат.

Эгерде $\phi(x, y_1, ..., y_n)$ функциясы кандайдыр бир D областында аныкталып, үзгүлтүксүз $\partial\phi / \partial x, \partial\phi / \partial y_1, ..., \partial\phi / \partial y_n$ айрым туундуларына ээ болсо жана $y_i, i = 1,2,...,n$ өзгөрмөлөрүнүн ордуна системанын каалагандай $y_i(x), i = 1,2,...,n$ чыгарылышын койгондо ар кандай $x \in (a,b)$ үчүн турактуу маанини кабыл алса, анда $\phi(x, y_1, ..., y_n)$ функциясы (4.1.2) нормалдуу системасынын интегралы деп аталат.

$$\Phi[x, y_1(x), ..., y_n(x)] \equiv c$$

барабардыгы, мында $\phi(x, y_1, ..., y_n)$ – нормалдуу системанын интегралы, ал эми c – каалагандай турактуу сан болсо, (4.1.2) системанын биринчи интегралы деп аталат.

Эгерде (4.1.2) системасынын көз каранды эмес n биринчи интегралдары $\varphi_1(x, y_1, ..., y_n), \varphi_n(x, y_1, ..., y_n)$ белгилүү болсо, анда

$$\varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = c_i \quad (i = 1,...,n)$$

барабардыктардын жыйындысы, мында c_i – турактуу сандар, бул системанын жалпы интегралын аныктайт.

n-тартиптеги дифференциалдык теңдемени (4.1.2) түрүндөгү нормалдуу системага алып келүүгө болот. Тескерисинче, (4.1.1) же (4.1.2) системалары көпчүлүк учурларда n-тартиптеги дифференциалдык теңдемеге алынып келинет, жана аны чыгаруу менен алгачкы системанын чыгарылышын да табууга болот.

Мисал 4.1.1. Дифференциалдык теңдемелердин

$$\begin{cases} y_1'' + xy_2 = 0 \\ y_2'' + 2y_1' - y_2 = 0 \end{cases}$$

каноникалык системасын нормалдуу системага келтиргиле.

Чыгаруу. Жаңы $y_1' = y_3$, $y_2' = y_4$ жардамчы функцияларды киргизели. Анда $y_1'' = y_3'$, $y_2'' = y_4'$ болот жана берилген система төмөнкүдөй 4-тартиптеги нормалдуу система менен алмашат:

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -xy_2 \\ y_4' = y_2 - 2y_3. \end{cases}$$

Мисал 4.1.2.

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$$

дифференциалдык теңдемесин нормалдуу системага алып келгиле.

Чыгаруу. $y' = z$ деп алсак, анда $y'' = z'$ жана теңдемелердин

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\omega^2 y \end{cases}$$

нормалдуу системасына келет.

Мисал 4.1.3. $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = y_1 - y_2 + y_3$, мында $y_i = y_i(x)$, $i = 1..3$, теңдемелер системасын 3-тартиптеги теңдемеге келтиргиле жана системанын чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Биринчи теңдемени x өзгөрмөсү боюнча дифференциалдап жана y_2' туундусун экинчи теңдемедеги туюнтмадан алмаштырабыз: $y_1'' = y_2' = y$. Бул теңдемени дагы бир жолу дифференциалдап жана үчүнчү теңдемеден y_3' туундусун анын туюнтмасы менен алмаштырабыз: $y_1''' = y_3' = y_1 - y_2 + y_3$, $y_2 = y_1'$, ал эми $y_3 = y_1''$ болгондуктан, акырында алабыз: $y_1''' - y_1'' + y_1' - y_1 = 0$.

Алынган үчүнчү тартиптеги теңдемени чыгаралы. Ага туура келген $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$ мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$ тамырларына ээ. Демек, $y_1 = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$. y_2 жана y_3 түү биз кароодон алып салууда $y_2 = y_1'$ жана $y_3 = y_1''$ ти алгандыктан,

$$y_2 = c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t, \quad y_3 = c_1 e^t - c_2 \cos t - c_3 \sin t.$$

4.1.3 мисалында биз нормалдуу системаларды интегралдоо методу – системаны бир белгисиз функциялуу бир дифференциалдык теңдемеге алып келген белгисиздерди жоюп салуу методу менен тааныштык. Дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылышынын башка методу болуп интегралдануучу комбинацияларды бөлүп чыгуу методу, б.а. (4.1.2) системасынан интегралдоого жана системанын биринчи интегралын алууга мүмкүн боло турган теңдемени алуу саналат. Эгерде (4.1.2) системанын көз каранды эмес n биринчи интегралдары табылса, анда алардын жыйындысы ушул системанын жалпы интегралын берет.

Мисал 4.1.4.

$$dy/dx = (z+e^y)/(z+e^x), \quad dz/dx = (z^2 - e^{x+y})/(z+e^x)$$

дифференциалдык теңдлемелер системасынын жалпы интегралын тапкыла.

Чыгаруу. Экинчи теңдеменин эки жагын e^{-x} ка көбөйтүп жана аларды биринчи теңдеменин тиешелүү бөлүктөрү жана $-e^{-x}z \equiv -e^{-x}z$ теңдештиги менен бириктирип, $\left(e^{-x}z\right)' + y' = 0$ дү алабыз, мындан $e^{-x}z + y = c_1$. Бул системанын биринчи интегралы. Эми экинчи теңдеменин эки жагын e^{-y} ке көбөйтүп, $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z(z+e^y)/(z+e^x)$ жана $x' = 1$ барабардыктары менен кошуп, $\left(e^{-y}z\right)' + x' = 0$ дү алабыз. Бул да системанын биринчи интегралы.

$$\begin{cases} e^{-x}z + y = c_1 \\ e^{-y}z + x = c_2 \end{cases}$$

системасынын якобианы нөлдөн айырмалангандыктан (текшергиле), биринчи интегралдардын экөө өз ара көз каранды эмес, ошондуктан алардын жыйындысы берилген теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын айкын эмес аныктайт.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№ 159. *Төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин каноникалык системасын нормалдуу түргө келтиргиле:*

а) $\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2'' = y_1 - 2y_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'' = y' + z' \\ z'' = z' + u' \\ u'' = u' + y'. \end{cases}$

№ 160. *Төмөнкү дифференциалдык теңдемелерди нормалдуу системага келтиргиле (x – көз каранды эмес өзгөрмө):*

а) $y''' - xyy' + y'^3 = 0;$ б) $y^{IV} - y^2 = 0.$

№ 161.

$$\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + z \end{cases}$$

теңдемелер системасын (мында $y = y(x)$, $z = z(x)$), экинчи тартиптеги теңдемеге келтиргиле жана системанын чыгарылышын тапкыла.

№ 162.

$$y' = 1 - 1/z, \quad z' = 1/(y - x)$$

системасы үчүн жалпы чыгарылышты тапкыла жана

$$y\big|_{x=0} = -1, \quad z\big|_{x=0} = 1$$

баштапкы шарттарды канааттандырган чыгарылышты бөлүп алгыла.

№ 163. *Интегралдануучу комбинациялар жана системанын тартибин төмөндөтүү методу менен жалпы интегралды тапкыла:*

$$\begin{cases} dy/dx = y \\ dz/dx = -x. \end{cases}$$

№ 164. *Төмөнкү дифференциалдык теңдемелер системасын интегралдагыла:*

а) $\begin{cases} dy/dx = 2xy^2 \\ dz/dy = (z - x)/x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} dy/dx = e^{x-y} \\ dz/dx = 2z/(2x - z^2). \end{cases}$

§ 4.2. Бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системалары

n - тартиптеги бир тектүү сызыктуу нормалдуу система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}$$

түрүндө болот же матрицалык формада

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \qquad (4.2.1)$$

мында $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$,

$a_{ij}(x)$ $(i,\ j = 1, \ldots, n)$ функциялары $I = [a,b]$ интервалында үзгүлтүксүз болушат. (4.2.1) системасынын чыгарылыштарынын <u>фундаменталдуу</u> <u>системасы</u> деп (4.2.1) каалагандай n сызыктуу көз каранды эмес $Y_k(x) = \left(y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), \ldots, y_n^{(k)}(x)\right)^T$, $k = 1, 2, \ldots, n$ чыгарылыштарынын жыйындысын айтабыз. Каалагандай (4.2.1) теңдеме чыгарылыштардын $Y_1(x), Y_2(x), \ldots, Yn(x)$ фундаменталдык системасына ээ.

(4.2.1) системасынын каалагандай чыгарылышы фундаменталдык системанын чыгарылыштарынын сызыктуу комбинациясы болуп саналат:

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(t),$$

мында $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – каалагандай турактуулар. (4.2.1) системасынын каалагандай $n+1$ чыгарылыштары сызыктуу көз каранды болушат.

Мисал 4.2.1. $dx/dt = y, \quad dy/dt = (2/t^2)x$ теңдемелер системасынын $x(-1)=1,\ y(-1)=-2$ шарттарын канааттандырган чыгарылышын тапкыла.

<u>Чыгаруу.</u> Берилген теңдемелер системасы Эйлердин

$$d^2x/dt^2 = dy/dt = (2/t^2)x,\ t^2(d^2x/dt^2) - 2x = 0 \quad (4.2.2)$$

теңдемесине алынып келинет. Алынган теңдеменин чыгарылышын $x = t^\lambda$ түрүндө издейли. (4.2.2) теңдемесине t^λ ны коюп жана t^λ га кыскартып, λ саны үчүн $\lambda(\lambda-1)-2=0$ теңдемесин алабыз, мындан $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$. Демек, (4.2.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышы $x = c_1t^2 + c_2/t$ болот. Системанын биринчи теңдемесинен $y = 2c_1t - c_2/t^2$ ка ээ болобуз. Баштапкы шарттарды эске алып, $1 = c_1 - c_2,\ -2 = -2c_1 - c_2$ системасынан c_1 жана c_2 ни аныктайбыз. $c_1=1,\ c_2=0$ дү табабыз. Демек, изделген чыгарылыш $x = t^2,\quad y = 2t$ түрүнө ээ болот.

Мисал 4.2.2.

$$\begin{cases} dx/dt = x\cos^2 t - (1-\sin t\cdot\cos t)y \\ dy/dt = (1+\sin t\cdot\cos t)x + y\sin^2 t \end{cases}$$

теңдемелер системасынын $x_1 = -\sin t,\ y_1 = \cos t$ деген бир чыгарылышы белгилүү. Бул системанын бардык чыгарылыштарын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Берилген системанын $\varphi(0)=1,\ \phi(0)=0$ шартын канааттандырган чыгарылышы $x=\varphi(t),\quad y=\phi(t)$ болсун дейли.

Остроградский-Лиувиллдин (3.5.13) формуласына ылайык

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) & -\sin t \\ \phi(t) & \cos t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} exp(\int_0^t (\sin^2\tau + \cos^2\tau)\,d\tau = e^t \text{ ны}$$

алабыз же болбосо

$$\varphi(t)\cos t + \phi(t)\sin t = e^t\,. \qquad (4.2.3)$$

$(\varphi(t), \phi(t))$ – алгачкы бир системанын чыгарылышы болгондуктан, (4.2.3) барабардыгын эсепке алуу менен

$$d\varphi / dt = -\phi + \cos t(\varphi \cos t + \phi \sin t) = -\phi + e^t \cos t,$$
$$d\phi / dt = \varphi + \sin t(\varphi \cos t + \phi \sin t) = \varphi + e^t \sin t$$
га ээ болобуз же
$$d(\varphi - e^t \cos t) / dt = -\phi - e^t \sin t),$$
$$d(\phi - e^t \sin t) / dt = \varphi - e^t \cos t).$$

Мындан $\varphi = e^t \cos t$, $\phi = e^t \sin t$. Изделүүчү системанын чыгарылышынын фундаменталдык системасы төмөнкү түрдө болот:

$$e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Теңдемелердин алгачкы системасынын жалпы чыгарылышы

$x = c_1 e^t \cos t - c_2 \sin t$, $y = c_1 e^t \sin t + c_2 \cos t$ формулалары менен аныкталат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасын чыгаргыла:

№ 165. $dy / dx = -y / x + zx,\ dz / dx = -2y / x^2 + z / x.$

№ 166. $dx / dt = -y / t,\ dy / dt = -x / t.$

№ 167. $dx / dt = -(2 / t)x,\ dy / dt = y + ((t + 2) / t)x.$

Көрсөтмө: Жоюп салуу методун колдонгула.

№ 168. $dx / dt = x \sin t + y,\ dy / dt = x - y \sin t$ *теңдемелер системасынын*

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix},\ x_1(0) = 1,\ y_1(0) = 1,$$

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ x_2(0) = -1,\ y_2(0) = 1$$

чыгарылыштарынан түзүлгөн Вронскийдин аныктагычынын $t = 2\pi$ *болгондогу маанисин эсептегиле.*

Көрсөтмө: Остроградский – Лиувиллдин формуласын колдонгула.

№ 169.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = e^{-\cos t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = e^{\sin t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

вектор-функциялары

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2\sin t - \cos t)x + (\sin t - \cos t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2(\cos t - \sin t)x + (2\cos t - \sin t)y \end{cases}$$

теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын фундаменталдык системасын түзөбү?

<u>Көрсөтмө</u>: Берилген функциялар берилген системанын чыгарылышы болоорун текшергиле. Вронскийдин аныктагычын колдонгула.

§ 4.3. Турактуу коэффициенттүү сызыктуу системалар

$A(x)=const$ болгондогу (4.2.1) түрүндөгү турактуу коэффициенттүү

$$dy/dx = A\,y(t) \tag{4.3.1}$$

сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасын (мында $y=(y_1,\dots,y_n)$ – n өлчөмдүү вектор, A – $n\times n$ өлчөмүндөгү турактуу квадраттык матрица), белгисиздерди жоюп салуу методу менен бир белгисиз функциясы бар жогорку тартиптеги теңдемеге алып келүүгө болот. Бирок, көрсөтүлгөн теңдемелер системасын чыгаруунун мындан башка методдору да бар.

Турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу системаларды интегралдоо үчүн <u>Эйлердин методу</u> кеңири колдонулат. (4.3.1) системасынын чыгарылышын

$$y = e^{\lambda x}a, \quad a = (a_1,\dots,a_n). \tag{4.3.2}$$

түрүндө издейли: Эгерде λ – матрицанын өздүк мааниси болсо, б.а.

$$det(A - \lambda E) = 0,$$

мүнөздөгүч теңдеменин тамыры болсо, (мында a – λ санына дал келген A матрицанын өздүк вектору), анда (4.3.2) функциясы (4.3.1) системасынын чыгарылышы болот.

Эгерде A матрицанын $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ өздүк маанилери эки-экиден ар башка жана аларга дал келген ушул матрицанын a_1, $a_2, \ldots, a_n$ – өздүк векторлору болсо, анда (4.3.1)теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} a_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} a_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n x} a_n,$$

(мында $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – эркин сандар) формуласы менен аныкталат.

Эгерде A матрицасынын эселүү өздүк мааниси λ үчүн анын эселиги канча болсо, ошончо сызыктуу көз каранды эмес $a_1, a_2, \ldots a_n$ векторуна ээ болсо, анда ага изделүүчү системанын k сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары дал келет: $e^{\lambda x} a_1$, $e^{\lambda x} a_2, \ldots, e^{\lambda x} a_k$.

Эгерде k эселүү өздүк мааниси λ үчүн m $(m < k)$ сызыктуу көз каранды эмес өздүк векторлорго гана ээ болсо, анда λ га дал келген чыгарылышты $k - m$ даражасындагы вектордук көп мүчөсүнүн $e^{\lambda t}$ га көбөйтүндүсү түрүндө издөөгө болот, б.а. төмөнкү түрдө

$$y = \left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-m} x^{k-m}\right) e^{\lambda x}.$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{k-m}$ векторлорун табуу үчүн системага (4.3.2) туюнтмасын коюу керек. Системанын оң жана сол бөлүктөрүнүн окшош мүчөлөрүнүн коэффициенттерин барабарлап, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-m}$ векторлорун табуу үчүн теңдеме алабыз.

Эгерде A матрицанын өздүк маанилеринин арасында комплекстүү сандар болсо, анда (4.3.1) системасынын чыгарылышы жогоруда көрсөтүлгөн метод боюнча ушундай өздүк санга дал келген комплекстүү функциялар аркылуу тургузулат. Чыныгы функцииялар аркылуу (A анык матрицасы учурунда) чыгарылышты көрсөтүү үчүн $\lambda = \alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$ өздүк санына дал келген комплекстүү чыгарылыштын чыныгы жана мнимый бөлүктөрү сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштар болгонун пайдалануу керек.

Мисал 4.3.1. $y(0) = -1$, $z(0) = 2$ шартын канааттандырган

$$\begin{cases} dy/dx = -y - 2z \\ dz/dx = 3y + 4z, \end{cases} \qquad (4.3.3)$$

бир тектүү системасынын айрым чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. Эйлердин методу боюнча жалпы чыгарылышты табабыз. (4.3.3) системасынын айрым чыгарылышын

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \; z = \gamma_2 e^{\lambda x} \tag{4.3.4}$$

түрүндө издейли. Мүнөздөгүч теңдемени түзөбүз:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \cdot$$

Ал $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = 2$ тамырларына ээ. $\lambda_1 = 1$ тамырына туура келген (4.3.4) түрүндөгү айрым чыгарылышты тургузабыз:

$$\begin{cases} (-1-1)\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + (4-1)\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \text{же} \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 0.$$

γ_1, γ_2 сандарынын бирин каалагандай тандап алууга болот. $\gamma_1 = 1$ деп алсак, $\gamma_1 = -1$. Ошондуктан $\lambda_1 = 1$ мүнөздөгүч санына дал келген :

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x$$

айрым чыгарылышы. Ушуга окшош $\lambda_2 = 2$ мүнөздөгүч санына дал келген айрым чыгарылышты табабыз: $y_2 = 2e^{2x}$, $z_2 = -3e^{2x}$. (4.3.3) системасынын жалпы чыгарылышы төмөнкүчө болот

$$y = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}, \; z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}. \tag{4.3.5}$$

Берилген баштапкы шартты канааттандырган айрым чыгарылышты табабыз. (4.3.5) де $x = 0, y = -1, z = 2$ деп алып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{cases} -1 = c_1 + 2c_2 \\ 2 = -c_1 - 3c_2. \end{cases}$$

Мындан $c_1 = 1, c_2 = -1$. Ошондуктан, изделген чыгарылыш:

$$\begin{cases} y = e^x - 2e^{2x} \\ z = -e^x + 3e^{2x} \end{cases}.$$

Мисал 4.3.2. Төмөнкү берилген системанын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} dy/dx = 2y - z \\ dz/dx = y + 2z. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Чыгаруу. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ же $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$ тамырларына ээ.

$y = \gamma_1 e^{(2+i)x}$, $z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$ түрүндөгү комплекстүү чыгарылышты $\lambda_1 = 2+i$ мүнөздөгүч санына туура келгендей тургузабыз

$$-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0$$

теңдемеден γ_1, γ_2 сандарын аныктайбыз.

$\gamma_1 = 1$ деп алып

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x),\; z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x) \quad (4.3.7)$$

боло турган $\gamma_2 = -i$ ни табабыз. Бул жерде Эйлердин $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $i = \sqrt{-1}$ формуласын колдондук. (4.3.7) ден анык жана мнимый бөлүктөрүн ажыратып, эки көз каранды эмес айрым чыгарылыштарды алабыз:

$$y_1 = e^{2x}\cos x,\;\; z_1 = e^{2x}\sin x;\;\; y_2 = e^{2x}\sin x,\;\; z_2 = -e^{2x}\cos x.$$

(4.3.6) системасынын жалпы чыгарылышы төмөнкүчө болот

$$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x),\;\; z = e^{2x}(c_1\sin x - c_2\cos x).$$

Мисал 4.3.3.

$$\begin{cases} y'(x) = 2y - z \\ z'(x) = 4y + 6z \end{cases}$$

системанын жалпы чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$$

мүнөздөгүч теңдемеси эселүүлүгү $k = 2$ болгон $\lambda = 4$ деген тамырга ээ. Ошондуктан системанын чыгарылышын

$$\begin{cases} y = (A_1 + B_1x)e^{4x} \\ z = (A_2 + B_2x)e^{4x}) \end{cases}$$

түрүндө издейбиз. Бул туюнтманы изделүүчү системага коёбуз жана e^{4x} га кыскартабыз:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} 2A_1 - A_2 \\ 4A_1 + 6A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2B_1 - B_2 \\ 4B_1 + 6B_2 \end{pmatrix}x.$$

x тин бирдей даражасын алдындагы коэффициенттерди барабарлап:

$$B_1 + 2A_1 + A_2 = 0,\ B_2 - 4A_1 - 2A_2 = 0,$$
$$2B_1 + B_2 = 0,\ -2B_2 - 4B_1 = 0$$

дү алабыз. $A_1 = c_1$ жана $B_1 = c_2$ деп алсак, $B_2 = -2c_2$ жана $A_2 = -2c_1 - c_2$ ни алабыз. Ошентип, системанын жалпы чыгарылышы

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{4t},\quad z = (-(2c_1 + c_2) - 2c_2 x)e^{4t}$$

болот.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Эйлердин методу боюнча жалпы чыгарылышты тапкыла жана көрсөтүлгөн баштапкы шартты канааттандырган чыгарылышты бөлүп алгыла:

№ 170. $y' = y + z,\quad z' = -2y + 4z;\quad y(0) = 0,\quad z(0) = -1.$

№ 171. $\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$ № 172. $\begin{cases} y' = y - 2z \\ z' = 6y - 5z. \end{cases}$

№ 173. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y. \end{cases}$ № 174. $\begin{cases} dy/dx = -y + z \\ dz/dx = -y - 3z. \end{cases}$

№ 175. $\begin{cases} dx/dt = -y + z \\ dy/dt = z \\ dz/dt = -x + z;\ x = 1,\ y = 1/2,\ z = 1/2\quad t = 0 \text{ болгондо} \end{cases}$

§ 4.4. Бир тектүү эмес сызыктуу системалар

Нормалдуу бир тектүү эмес сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасы

$$dy_i / dt = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \ldots + a_{in}y_n + f_i(x),\ i = 1,\ldots,n,$$

түргө же векторлук жазылышта

$$dy / dx = A(x)y + f(x), \tag{4.4.1}$$

түргө ээ, мында y – компоненттери $y_1,\ldots,y_n$ болгон вектор; $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ – компоненттери $a_{ij}(x)$ функциялары болгон матрица; $f(x)$ – компоненттери $f_i(x)$ болгон вектор-функция жана дагы $f_i(x)$ функцияларынын жок дегенде бири нөлгө теңдеш барабар эмес. (4.4.1) системасын интегралдоону жоюп салуу методу боюнча жүргүзсө болот, бирок кээде (4.2.1) бир тектүү системасына туура келген

$$dy / dx = A(x)y \tag{4.4.2}$$

системасынын чыгарылышын жана (4.4.1) системанын кандайдыр бир $\widetilde{y}(x)$ айрым чыгарылышын алдын-ала табуу артыкча. Эгерде (4.4.2) бир тектүү системасынын чыгарылыштарынын фундаменталдык системасы $Y(x)$ белгилүү болсо, анда $y(x)$ жалпы чыгарылышын турактуу чоңдуктарды вариациялоо методу аркылуу табууга болот. Так эле

$$y(x) = Y(x)\,c(x) \tag{4.4.3}$$

деп болжолдоп, (4.4.3) тү (4.4.1) системасына ордуна коюу жолу менен $c(x)$ вектор-функциясын аныктайбыз. Мындан $dy/dx=A(x)Y(x)$ барабардыгын эске алып, төмөнкү теңдемелер системасына келебиз

$$Y(x)\,dc / dx = f(x) \tag{4.4.4}$$

Ушул системадан $dc/dx=\varphi(x)$ табабыз жана интегралдап, турактуу чоңдукка чейин тактыкта $c(x)$ вектор-функциясын алабыз. (4.4.3) кө аларды коюп, (4.4.1) бир тектүү эмес системанын изделген жалпы чыгарылышын алабыз.

Турактуу коэффициенттүү бир тектүү эмес сызыктуу система (мында $A(x) = A$ –турактуу), б.а. (4.4.1) системасы үчүн кээ бир учурларда айрым чыгарылыш аныкталбаган коэффициенттер методу аркылуу да табылышы мүмкүн. Муну эгерде $f_k(x)$

төмөнкү функциялардын суммасынан жана көбөйтүндүсүнөн турган учурда аткарууга болот:

$$b = b_1 x + \dots + b_m x^m,\ e^{\alpha x},\ \cos\beta x,\ \sin\beta x.$$

$f_k(x) = P_{m_k}(x)\, e^{\gamma x}$, (мында $P_{m_k}(x)$ – m_k даражасындагы көп мүчө), болгон учурунда (4.4.1) системасынын айрым чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y_k = Q^k_{m+s}(x)\, e^{\gamma x},\ k = 1..n, \qquad (4.4.5)$$

мында Q^k_{m+s} – белгисиз коэффициенттери менен $m+s$ даражасындагы көп мүчө, $m = \max m_k$, $s = 0$, эгерде γ саны A матрицасынын өздүк саны болбосо, а эгерде γ саны A матрицанын өздүк саны болсо, анда s ти ушул сандын эсесине барабар алууга болот (же болбосо, б.а. бир тектүү системанын жалпы чыгарылышында e^{γ} га көбөйтүлгөн көп мүчөлөрдүн эң чоң даражасынан s бирдигине көп).

Q^k_{m+s} көп мүчөлөрдүн белгисиз коэффициенттери берилген системага (4.4.5) туюнтмасын коюу жолу менен жана окшош мүчөлөрдүн коэффициенттерин салыштыруу менен аныкталат.

$$f_k(x) = P_{m_k}(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x + R_{m_k}(x)\, e^{\alpha x} \sin\beta x$$

(мында $\nu = \alpha + i\beta A$ матрицасынын өздүк саны), болгон учурда да көп мүчөлөрдүн даражалары ушуга окшош аныкталат.

Мисал 4.4.1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2, \end{cases}$

бир тектүү системанын $X_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$, $X_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$

чыгарылыштарынын фундаменталдуу системасын билип туруп, бир тектүү эмес

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_1 + x_2 + t \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 + 1 \end{cases} \qquad (4.4.6)$$

системанын жалпы чыгарылышын тапкыла.

<u>Чыгаруу</u>. Турактуу чоңдуктарды вариациялоо методун колдонобуз. $c_1(t)$ жана $c_2(t)$ үчүн (4.4.4) системасын түзөлү:

$$\begin{pmatrix} e^{7t} & -e^{t} \\ e^{7t} & 5e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$c_1'(t) = (5\,t + 1)\,/\,6\,e^{-7t}$, $c(t) = (1-t)\,/\,6\,e^{-t}$ ды таап жана интегралдап $c_1(t)=-((5/42)t+2/49)e^{-7t}+c_1$, $c_2(t)=1/6t\,e^{-t}+c_2$ ни алабыз. Ошентип, (4.4.6) системасынын жалпы чыгарылышы төмөнкү түрдө жазылат

$$x(t)=\left[0-((5/42)t+2/49)e^{-7t}+c_1\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}+\left(1/6\,t\,e^{-t}+c_2\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{t}=$$

$$=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix} -2/7t & -2/49 \\ 5/7t & -2/49 \end{pmatrix}.$$

Мисал 4.4.2. Берилген системанын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} dy/dx = y-2z+3 \\ dz/dx = y-z+1. \end{cases} \tag{4.4.7}$$

Чыгаруу.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0,\ \lambda^2+1=0$$

мүноздөгүч теңдемеси $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$ мнимый тамырларга ээ.

$$y=\gamma_1 e^{ix},\quad z=\gamma_2 e^{ix}$$

комплекстүү чыгарылышты тургузабыз.

$(1-i)\gamma_1-2\gamma_2=0$ теңдемесинен γ_1 жана γ_2 сандарын аныктайлы, б.а. $\gamma_1=2,\ \gamma_2=1-i$.

$y=2e^{ix}$, $z=(1-i)e^{ix}$ чыгарылыштарынан анык жана мнимый бөлүктөрүн бөлүп алалы

$$y_1=2\cos x,\quad y_2=2\sin x,$$

$$z_1=\cos x+\sin x,\quad z_2=\sin x-\cos x.$$

Тиешелүү бир тектүү системанын дал келген жалпы чыгарылышы төмөнкүчө болот

$$\begin{cases} y=2C_1\cos x+2C_2\sin x \\ z=(C_1-C_2)\cos x+(C_1+C_2)\sin x. \end{cases}$$

Алгачкы системанын айрым чыгарылышын

$$y = A, \quad z = B \tag{4.4.8}$$

түрүндө издейли. Анда (4.4.7) ге (4.4.8) ди коелу:

$$\begin{cases} A - 2B + 3 = 0 \\ A - B + 1 = 0, \end{cases}$$

мындан $A=1,\ B=2$. Ошондуктан $y = 1,\ z = 2$ чыгарылышы (4.4.7) системасынын айрым чыгарылышы болуп саналат жана жалпы чыгарылыш төмөнкү түрдө болот

$$\begin{cases} y = 1 + 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x \\ z = 2 + (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x. \end{cases}$$

Мисал 4.4.3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + t^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + e^t \end{cases}$$

системанын айрым чыгарылышын тапкыла.

Чыгаруу. $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_{1,2} = \pm i$ тамырларына ээ болгондуктан, системанын айрым чыгарылышын экинчи даражадагы көп мүчө менен De^t түрүндөгү функциянын

$$x_1 = A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + D_1 e^t, \quad x_2 = A_2 t^2 + B_2 t + C_2 + D_2 e^t$$

суммасы түрүндө издейбиз. Ушул функцияларды берилген системага коюп, төмөнкү барабардыктарды алабыз

$$\begin{cases} 2A_1 t + B_1 + D_1 e^t = -A_2 t^2 - B_2 t - C_2 - D_2 e^t + t^2 \\ 2A_2 t + B_2 + D_2 e^t = A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + D_1 e^t + e^t. \end{cases}$$

t нын бирдей даражаларынын жана e^t нын алдындагы коэффициенттерин барабарлап, төмөнкү системаны алабыз

$$\begin{cases} 2A_1 = -B_2,\ \ B_1 \equiv C_2,\ \ D_1 = -D_2,\ \ 1 - A_2 = 0 \\ 2A_2 = B_1,\ \ B_2 \equiv C_1,\ \ D_2 = D_1 + 1,\ \ A_1 = 0. \end{cases}$$

Мындан
$A_1 = B_2 = C_1 = 0,\ \ A_2 = 1,\ \ B_1 = 2,\ \ C_2 = -2,\ \ D_2 = 1/2,\ \ D_1 = -1/2$
жана изделген чыгарылыш $x_1 = 2t - (1/2)e^t$, $x_2 = t^2 - 2 + (1/2)e^t$ түрүндө болот.

Мисал 4.4.4. Берилген бир тектүү эмес системанын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} dx/dt = x - 2y + e^t \\ dy/dt = x + 4y + e^{2t}. \end{cases} \qquad (4.4.9)$$

Чыгаруу. Адегенде тиешелүү бир тектүү

$$\begin{cases} dx/dt = x - 2y \\ dy/dt = x + 4y \end{cases} \qquad (4.4.10)$$

системасынын жалпы чыгарылышын табабыз. Мүнөздөгүч теңдеме

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ түрүнө ээ же болбосо $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$

Бул теңдеменин тамырлары: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$ $\lambda_1 = 2$ тамырына $x_1 = \gamma_1 e^{2t}$, $y_1 = \gamma_2 e^{2t}$ айрым чыгарылыштары туура келет.

(4.4.10) го x_1 жана y_1 ди коюп, γ_1 жана γ_2 ни табуу үчүн

$$-\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0,\ \ \gamma_1 + 2\gamma_2 = 0$$

системасын алабыз. Мындан, мисалы $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = -1$ ге ээ болобуз, ошондуктан (4.4.10) бир тектүү системасынын биринчи айрым чыгарылышы: $x_1 = 2e^{2t}$, $y_1 = -e^{2t}$. $\lambda_2 = 3$ тамырына $x_2 = \mu_1 e^{3t}$, $y_2 = \mu_2 e^{3t}$ айрым чыгарылышы туура келет. μ_1 жана μ_2 сандарын

$$\begin{cases} -2\mu_1 - 2\mu_2 = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 = 0 \end{cases}$$

системасынан табабыз. Бул системаны, мисалы, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$ сандары канааттандырат. Анда (4.4.10) системасынын экинчи айрым чыгарылышы: $x_2 = e^{3t}$, $y_2 = -e^{3t}$. (4.4.10) бир тектүү системасынын жалпы чыгарылышы:

$x = 2c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$, $y = -c_1e^{2t} - c_2e^{3t}$. Аныкталбаган коэффициенттер методу аркылуу (4.4.9) бир тектүү системасынын айрым чыгарылышын табабыз. Мүнөздөгүч теңдеменин тамыры $x=2$ жана оң жактарынын түрү $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$ болгондуктан, айрым чыгарылышты

$$x = Ke^t + (Lt + M)e^{2t}, \quad y = Ne^t + (Pt + Q)e^{2t}, \qquad (4.4.11)$$

түрүндө жазабыз.

(4.4.10) го (4.4.11) ди коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$Ke^t + 2(Lt+M)e^{2t} + Le^{2t} = Ke^t + (Lt+M)e^{2t} - 2Ne^t - 2(Pt+Q)e^{2t} + e^t,$$

$$Ne^t + 2(Pt+Q)e^{2t} + Pe^{2t} = Ke^t + (Lt+M)e^{2t} + 4Ne^t + 4(Pt+Q)e^{2t} + e^{2t}$$

Бул теңдештиктердин эки жактарындагы e^t, e^{2t}, te^{2t} нин алдындагы коэффициенттерди барабарлап, биринчи туюнтмадан:

$$\begin{array}{r|l} e^t & K = K - 2N + 1, \\ e^{2t} & 2M + L = M - 2Q, \\ te^{2t} & 2L = L - 2P, \end{array}$$

экинчи туюнтмадан:

$$\begin{array}{r|l} e^t & N = K + 4N, \\ e^{2t} & 2Q + P = M + 4Q + 1, \\ te^{2t} & 2P = L + 4P \end{array}$$

барабардыктарын алабыз. Теңдемелердин бул системасын чыгарып, $K = -3/2,\ L = 2,\ M = 0,\ N = 1/2,\ P = -1,\ Q = -1$ ди табабыз.

Демек, (4.4.9) бир тектүү эмес системасынын айрым чыгарылышы

$$\tilde{x} = -\frac{3}{2}e^t + 2te^{2t}, \quad \tilde{y} = \frac{1}{2}e^t - (t+1)e^{2t}$$

болот.

Мисал 4.4.5. Төмөнкү системаны чыгаргыла

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t. \end{cases} \qquad (4.4.12)$$

Чыгаруу. Мүнөздөгүч теңдеме

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \text{ түрүнө ээ болот.}$$

Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары: $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 2$. Тиешелүү бир тектүү системанын жалпы чыгарылышы: $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, $y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}$. (4.4.12) бир тектүү эмес системасынын айрым чыгарылышын табууда $f_1(t) = 0$, $f_2(t) = -5 \sin t$ экенин эске алабыз. Аны жазалы:

$$\tilde{x} = A\cos t + B\sin t,\ \tilde{y} = M\cos t + N\sin t.$$

Аларды (4.4.12) системасына коёлу:

$$-A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t + 2M\cos t + 2N\sin t,$$

$$-M\sin t + N\cos t = A\cos t + B\sin t - 5\sin t$$

жана барабардыктын эки жагындагы sin t жана cos t нын коэффициенттерин барабарлап, төмөнкүнү алабыз:

$$-A = B + 2N,\quad B = A + 2M,$$

$$-M = B - 5,\quad N = A,$$

мында $A=-1$, $B=3$, $M=2$, $N=-1$, ошондуктан

$$\tilde{x} = -\cos t + 3\sin t,\ \tilde{y} = 2\cos t - \sin t.$$

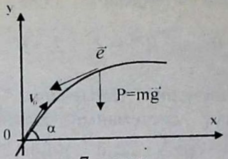
Алгачкы системанын жалпы чыгарылышы төмөнкүчө болот:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t,$$

$$y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t.$$

Мисал 4.4.6. V_0 баштапкы ылдамдыгы менен горизонтко α бурчу менен тело ыргытылган. Абанын каршылыгын кыймылдын ылдамдыгына пропорциялаш деп эсептеп, кыймылдын убакыттан көз каранды болгон законун жана телонун кыймылынын траекториясын тапкыла.

Чыгаруу. Тело Oxy тегиздигинде кыймылдайт дейли, мында Ox–горизонталдык, ал эми Oy–вертикалдык ок (7-сүрөт.). Координаталар башталышы О чекити телонун кыймылынын башталышы болсун.



7-сүрөт

Телого эки күч таасир этет: телонун төмөн багытталган $\vec{P} = m\vec{g}$ оордук күчү жана кыймылдын ылдамдыгынын векторуна карама-каршы багытталган абанын каршылык күчү $\vec{Q} : \vec{Q} = -km\vec{V}$

Ньютондун экинчи законуна ылайык, телонун кыймыл теңдемесин жазабыз:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - mk\frac{dy}{dt},$$

же

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}.$$

Бул теңдемелерди интегралдап төмөнкүнү табабыз:

$$x = \frac{c_1}{k}e^{-kt} + c_2, \quad y = -\frac{g}{k}t - \frac{c_3}{k^2}e^{-kt} + c_4 .$$

V_0 баштапкы ылдамдыгынын ox жана oy окторуна проекцияларын тиешелүү түрдө p жана q аркылуу белгилеп, б.а. $p = V_0 \cos\alpha, q = V_0 \sin\alpha$ деп $x(0) = y(0) = 0$ баштапкы шарттардан төмөнкүнү алабыз

$$dx/dt(0) = p, dy/dt(0) = q .$$

Интегралдоонун турактуу чоңдуктарын табабыз:

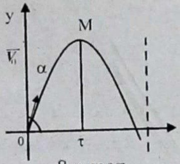
$$c_1 = p, c_2 = p/k, c_3 = g + kq, c_4 = 1/k\,(g/k + q).$$

Ошентип, телонун координаталары убакыттын өтүшү менен

$$x = p/k\left(1 - e^{-kt}\right), \quad y = 1/k\left(g/k + q\right)\left(1 - e^{-kt}\right) - gt/k. \quad (4.4.13)$$

формулалары боюнча өзгөрүшөт. Ушул теңдемелерден көрүнүп тургандай x абциссасы жана убакыттын өтүшү менен p/k пределине асимптотикалык жакындап чоңоёт, ордината болсо $y \to -\infty$.

dy/dt туундусу $t=\tau$ да нөлгө айланат, мында τ саны $(g/k+q)e^{-kt}-g/k=0$ теңдемесин канаатандырат, б.а. $\tau=1/k\ln(1+qk/g)$.



8-сүрөт

Убакыттын τ моментинде траектория эң чоң M бийиктигине жетет (8-сүрөт.), анан ылдый көздөй түшөт да $x=p/k$ вертикалдык асимптотага жакындайт. (4.4.13) теңдемелеринен t көз каранды эмес өзгөрмөсүн чыгарып салып, телонун кыймыл траекториясынын теңдемесин табабыз:

$$y=(g/k+q)x/p+g/k^2\ln(1-kx/p).$$

x, y координаталары убакыттан көз карандылыкта

$$x=(V_0\cos\alpha)/k\left(1-e^{-kt}\right),\ y=1/k(g/k+V_0\sin\alpha)\left(1-e^{-kt}\right)-gt/k$$

закону боюнча өзгөрүшөт. Телонун кыймыл траекториясы

$$y=(g/k+V_0\sin\alpha)x/(V_0\cos\alpha)+g/k^2\ln(1-kx/(V_0\cos\alpha))$$

формула менен аныкталат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү теңдемелер системаларынын чыгарылыштарын аныкталбаган коэффициенттер методу аркылуу тапкыла:

№ 176. $\dot{x}=3x-2y+t,\ \dot{y}=3x-4y.$

№ 177. $\dot{x}=x-y,\ y=x+\dot{y}+e^t.$

№ 178. $\dot{x}=5x-3y+te^{2t},\ \dot{y}=3x-y+e^{3t}.$

№ 179. $\dot{x}=x+y-\cos t,\ \dot{y}=-2x-y+\sin t+\cos t.$

Берилген системанын жалпы чыгарылышын турактуу чондуктарды вариациялоо методу аркылуу тапкыла жана *коюлган баштапкы шарттарды (алар көрсөтүлгөн болсо) канааттандырган чыгарылышты бөлүп алгыла:*

№ 180. $\begin{cases} y_1' = y_1 + y - x^2 + x - 2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y + 2x^3 - 4x - 7; \end{cases}$ $y_1(0) = 0, y_2(0) = 2.$

№ 181. $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x} \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

№ 182. $\begin{cases} dx/dt = x - y + 4\cos 2t \\ dy/dt = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$

№ 183*. *А заты Р жана Q заттарына ажырайт. Алардын ар биринин пайда болуу ылдамдыгы Анын бөлүнбөгөн затынын массасына пропорционалдуу. Эгерде ажыроо процесси башталгандан бир сааттан кийин* $x = a/8$, $y = 3a/8$ *болсо, анда Р жана Q заттарынын* x *жана* y *массаларынын* t *убакыттан көз каранды болгон өзгөрүү закондорун тапкыла (А затынын баштапкы массасы* a*).*

№ 184*. *Массасы* m *болгон материалдык чекит О борборуна аралыкка пропорционалдуу болгон күч менен тартылат. Кыймыл борбордон* a *аралыгында турган А чекитинен ОА кесиндисине перпендикуляр болгон* V_0 *баштапкы ылдамдыгы менен башталат. Кыймылдын траекториясын тапкыла.*

§ 4.5. Дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын геометриялык жана механикалык иллюстрациясы. Фазалык мейкиндик

Жөнөкөйлүк үчүн эки дифференциалдык теңдеменин

$$x' = f_1(t, x, y), \quad y' = f_2(t, x, y) \qquad (4.5.1)$$

нормалдуу системасын карайлы.

x жана y өзгөрмөлөрүн физикалык маанилерине көз карандысыз эле Oxy тегиздигиндеги чекиттин координаталары деп эсептейбиз жана бул тегиздикти фазалык тегиздик деп атайбыз. Системанын каалагандай

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (4.5.2)$$

чыгарылышын фазалык тегиздиктеги сызыктын параметрдик берилиши катары караса болот. Механиканын терминологияларын пайдаланып жана t – убакыт деп эсептеп, $x(t)$ жана $y(t)$ функциялары, кыймылдоочу чекиттин координата окторуна болгон проекцияларынын кыймыл закондорун туюнтат, ал эми (4.5.2) сызыгын кыймылдын траекториясы болуп саналат деп айтабыз. x' жана y' туундулары бул учурда кыймылдоочу чекиттин ылдамдыгынын координата окторуна болгон проекциясын көрсөтөт.

Ушул айтылгандардын баары бизге ыңгайлуу геометриялык же, тагыраак айтканда, механикалык иллюстрация экени түшүнүктүү. Конкреттүү маселелерде x жана y өзгөрмөлөрү чекиттин кыймылы менен эч кандай байланышпаган чоңдуктарды белгилеши мүмкүн, мисалы, электр чынжырындагы ток болушу мүмкүн.

Эгерде (4.5.1) системасына кошумча

$$x\big|_{t=t_0}=\alpha,\ y\big|_{t=t_0}=\beta$$

баштапкы шарттарын берсек, анда аларга кандайдыр бир L_0 траектория боюнча кыймыл законун аныктаган $x(t_0), y(t_0)$ айрым чыгарылыштар туура келет. Эми, убакыттын баштапкы моментин өзгөртүп, бирок x жана y фазалык координаталардын мурунку

$$x\big|_{t=t_1}=\alpha,\quad y\big|_{t=t_1}=\beta$$

маанилерин калтырып жаңы баштапкы шартты алалы. Биз жаңы $x_1(t)$, $y_1(t)$ чыгарылышты алабыз жана ага туура келген жаңы L_1 траекториясын алабыз. сөзсүз эле L_0 менен дал келиши милдеттүү эмес. Чындыгында эле, (4.5.1) теңдемелеринен алынган x', y' дин маанилерин, убакыттын баштапкы моменттерине t_0 жана t_1 коюп, ар түрдүү чоңдуктарды алабыз. Бул болсо, төмөнкүнү түшүндүрөт. Эгерде кыймыл (α,β) чекитинен убакыттын t_0 моментинде башталса, анда ылдамдыктын вектору бир болот, а эгерде убакыттын t_1 моментинде башталса, анда вектор башка болот; ушуну менен бирге чекиттер ар түрдүү багытта кыймыл башташат. Ошентип, фазалык тегиздиктин бир жана ошол эле чекити аркылуу ар түрдүү траекториялар кыймылдай алат. Мисал келтирели.

Мисал 4.5.1. $\dot{x}=1, \ \dot{y}=2t$ системасын карайлы. Мындан $x=t+c_1, \ y=t^2+c_2$. $x|_{t=0}=0, \ y|_{t=0}=0$ баштапкы шарттарында $x=t, \ y=t^2$ функциясы чыгарылыш болот; $y=x^2$ параболасы ага дал келген траектория болот. Эгерде x жана y тин ошол эле маанилерин $t=1$ болгондо алсак, анда тиешелүү түрдө $x=t-1, \ y=t^2-1$ келип чыгат. t ны жоюп салып, жаңы траекториянын $y=(x+1)^2-1$ теңдемесин табабыз, бул да парабола, бирок жогорудагы менен дал келбейт.

(4.5.1) теңдемелеринин оң жагына көз каранды эмес t чоңдугу кирбеген учур колдонулуштар үчүн өзгөчө маанилүү болот. Дифференциалдык теңдемелердин мындай системасы автономдуу деп аталат жана ал

$$dx/dt=f_1(x,y), \ dy/dt=f_2(x,y) \tag{4.5.3}$$

түрүнө ээ болот.

Эгерде кыймыл автономдуу система менен жазылса, анда фиксацияланган (α,β) чекитинен убакыттын кандай гана моментинде кыймылды баштасак деле ылдамдыктын вектору бир гана болот. Ошондуктан автономдуу системалар үчүн (α,β) чекитинен башталган бардык кыймылдар убакыттын ар түрдүү моменттеринде ошол эле бир траектория боюнча өтүшөт. Бул ырастоонун механикалык мааниси бир топ эле түшүнүктүү. Кыймылды траектория боюнча тоголонуп жүргөн шарик түрүндө элестетели. Убакыттын ар түрдүү моменттеринде берилген чекиттен коюп жиберилген шариктер бири-бири менен кагылышпай, бирин бири кууп өтпөй ошол эле бир траектория боюнча кыймылдайт деп айтса болот (траекториялар туюк сызык түрүндө, мисалы, айлана же эллипс түрүндө болуп калышын эскерте кетели). Анын үстүнө, автономдуу система үчүн фазалык тегиздиктин ар бир чекити аркылуу жалгыз бир гана траектория өтөт.

Мисал 4.5.2.

$$dx/dt=y, \ dy/dt=-x \tag{4.5.4}$$

системасын карайлы. y ти жоюп салып, $\ddot{x} = \dot{y} = -x$, б.а. $\ddot{x} + x = 0$ экенин алабыз. Чыгарылыш $x = A\sin(t + \varphi)$ түрүндө болот; анда $y = A\cos(t + \varphi)$. Борбору координата башталышында жаткан радиусу A болгон $x^2 + y^2 = A^2$ айланалар траекториялар болуп кызмат кылышат.

Кайрадан (4.5.3) жалпы системаны карайлы жана (x_0, y_0) чекитинде оң жактарынын экөө тең нөлгө барабар болсун дейли:

$$f_1(x_0, y_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0) = 0.$$

Анда $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$ функциялары (б.а. турактуулары) (4.5.3) системасынын чыгарылыштары болушат. Бул болсо, (x_0, y_0) чекитине жайгаштырылган шарик бардык убакытта кыймылдабайт дегенди билдирет. Мындай чекиттер тынчтык чекиттери деп аталышат. Маселен, 4.5.2 мисалындагы система үчүн координаталар башталышы тынчтык чекити болот.

(4.5.3) системасы үчүн фазалык траекториялардын 3 тиби болушу мүмкүн: чекит; *туюк ийри сызык; туюк эмес ийри сызык*. (x_0, y_0) чекити (тең салмактуулук абалы) траектория болгон чыгарылыш турактуу: $x(t) = x_0$, $y(t) = y_0$, $\forall t \in R$. Туюк ийри сызык мезгилдүү, ал эми туюк эмес ийри сызык мезгилдүү эмес чыгарылышка туура келишет.

dt чондугун жоюп салынгандан алынган $dy/dx = f_1(x,y)/f_2(x,y)$ теңдемеси үчүн бул чекиттер өзгөчө чекиттер болушат (§2.7 ды кара). Мындан бул теңдеменин өзгөчө чекитке жакын жердеги интегралдык ийри сызыктарынын жайланышуусу жөнүндөгү маселе автономдуу системанын тынчтык чекитине жакын жердеги траекторияларынын жайланышуусу жөнүндөгү маселе менен тыгыз байланышта экени көрүнүп турат.

Көпчүлүк учурларда (4.5.3) сызыктуу эмес автономдуу системасынын өзгөчө чекиттердин айланасындагы траекторияларынын жайланышууларынын тиби сызыкташтырылган системанын траекторияларынын жайланышуусуна окшош экенин белгилеп кетели. Адатта, (4.5.3) системасын сызыкташтырууну анын оң жагын өзгөчө чекиттердин айланасында Тейлор катарына ажыратуу жана анын сызыктуу бөлүгүн бөлүп алуу жолу менен өткөрүшөт.

Бардык жогоруда көрсөтүлгөндөр эч кандай өзгөрүүсүз эле үч жана андан көп теңдемелер системасы үчүн да көчүрүлөт. $n = 3$ болгондо бизде белгисиз үч функция: $x(t)$, $y(t)$ жана $z(t)$ бар жана ушуга тиешелүү түрдө биз $Oxyz$ фазалык мейкиндикте траекторияларды карайбыз.

Аларды бул учурда геометриялык сүрөттөө көбүрөөк татаал экени өзүнөн өзү эле түшүнүктүү. $n > 3$ болгон учурда геометриялык сүрөттөө дегеле мүмкүн эмес болуп калат; терминологияны сактап, биз n-өлчөмдүү фазалык мейкиндик жөнүндө сөз кылабыз.

Мисал 4.5.3.

а) $\begin{cases} dx/dt = -y \\ dy/dt = x - 3x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} dx/dt = y \\ dy/dt = -\sin x \end{cases}$

системалардын тең салмактуулук абалын жана тең салмактуулук абалдарынын айланасындагы сызыкташтырылган системаларын тапкыла.

Чыгаруу. а) Берилген системанын тең салмактуулук абалын табалы:

$-y = 0$, $x - 3x^2 = 0$, мындан тең салмактуулуктун эки: $O(0,0)$ жана $O_1(1/3,0)$ абалын табабыз. Системаны O_1 чекитинин айланасында сызыкташтыралы. Тейлордун

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)/1!(x-x_0) + \\ + f'_y(x_0,y_0)/1!(y-y_0) + \ldots , \quad (4.5.5)$$

формуласын колдонобуз, мында 1-тартиптен жогорку мүчөлөрү жазылган эмес. Анда (4.5.5) тин негизинде $O_1(1/3,0)$ чекитинин айланасында $x - 3x^2 = -(x - 1/3) + \ldots$ га ээ болобуз.

Анда O_1 чекитинин айланасында сызыкташтырылган система төмөнкү түргө ээ:

$$\begin{cases} \dfrac{d(x - 1/3)}{dt} = -y \\ dy/dt = -(x - 1/3). \end{cases}$$

б) Бул система маятниктин $x - \sin x = 0$ теңдемесин сүрөттөөрүн белгилей кетели ([13]тү кара). Тең салмактуулук абал $y=0$ жана $\sin\ x=0$ теңдемелерден аныкталат. Бул теңдемелердин чыгарылыш болуп Ox огунун абсциссалары

$x = k\pi,\ k \in Z$ болгон чекиттери саналышат. Берилген системанын оң жактарынын мезгилдүүлүгүнүн негизинде, анын $x=0$, $y=0$ (чыгарылыш маятниктин тең салмактуулугунун төмөнкү абалына туура келет) жана $x = \pi$, $y = 0$ (чыгарылыш маятниктин тең салмактуулугунун жогорку абалына туура келет) эки чыгарылышын кароо жетиштүү. $O(0,0)$ чекитинин айланасында берилген

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -x$$

системасына сызыкташтырылат, анткени $sin\ x$ функциясынан $x=0$ чекитинин айланасындагы $sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$ сызыктуу бөлүгүн бөлүп алса болот. Берилген системаны $O_1(\pi,0)$ чекитинин айланасында сызыкташтыралы. (4.5.5) тин негизинде O_1 чекитинин айланасында

$$\sin x = -(x - \pi) + \ldots$$

га ээ болобуз. Анда сызыкташтырылган система

$$\begin{cases} \dfrac{d(x-\pi)}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = (x-\pi) \end{cases}$$

түрүнө ээ болот.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүлөр

№ 185. *Системалардын тең салмактуулук абалдарын тапкыла:*

а) $\frac{dx}{dt} = 2y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4x^2.$

б) $\frac{dx}{dt} = 4x^2 - y^2,\ \frac{dy}{dt} = -4x + 2xy - 8.$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ln(1 - y + y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}. \end{cases}$

V Глава. Туруктуулук теориясынын элементтери

§ 5.1. Туруктуулук менен байланышкан түшүнүктөрдүн аныктамалары

Көз каранды эмес өзгөрмө $x(t) = f(t,x)$ убактысы болуп саналат, бардык $t \geq t_0$ үчүн аныкталган

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ .... \; .... \; .... \; ... \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \tag{5.1.1}$$

координаталык жазууда деген болжолдоо менен дифференциалдык теңдемелердин (4.1.2) түрүндөгү нормалдык системасын карайбыз бардык до аныкталган нормалдуу системасын карайбыз.

(5.1.1) системанын кандайдыр бир $x = \varphi(t) = (\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))^T$ чыгарылышын бөлүп алабыз жана анны толкунданбаган кыймыл деп атайбыз. Эгерде каалагандай $\varepsilon > 0$ саны үчүн баштапкы учурдагы

$$|x_k(t_0) - \varphi_k(t_0)| < \delta, \;\; k = 1..n \tag{5.1.2}$$

барабарсыздыгынан бардык $t > t_0$ үчүн

$$|x_k(t) - \varphi_k(t)| < \varepsilon, \;\; k = 1..n \tag{5.1.3}$$

барабарсыздыгы келип чыга турган $\delta > 0$ санын көрсөтүүгө мүмкүн болсо, анда $x = \varphi(t)$ кыймылын Ляпунов маанисинде туруктуу деп атайбыз. Бул жерде $x(t)=(x_1(t),..., x_n(t))^T$ аркылуу (5.1.1) системанын $x(t_0) = (x_1(t_0),...x_n(t_0))^T$ баштапкы шарттары менен аныкталган каалагандай башка чыгарылышы белгиленген.

Эгерде жетишээрлик кичине $\delta > 0$ саны үчүн да (5.1.3) барабарсыздыгы жок дегенде бир $x(t)$ чыгарылыш үчүн аткарылбаса, анда $\varphi(t)$ кыймылы туруктуу эмес деп аталат.

Эгерде $\varphi(t)$ кыймылы Ляпунов маанисинде туруктуу болсо жана андан сырткары (5.1.2) шартында

$$\lim_{t\to+\infty}\left|x_k(t)-\varphi_k(t)\right|=0,\quad k=1,\dots,n$$

катышын канааттандырса, анда ал Ляпунов маанисинде асимптотикалык туруктуу деп аталат.

Мисал 5.1.1. $x = ax\ (a \in R)$ дифференциалдык теңдемесинин $\varphi(t_0)=c_0$ баштапкы шарты менен аныкталган $\varphi(t)$ чыгарылышын туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу. Баштапкы маселенин чыгарылышы: $\varphi(t)=c_0e^{a(t-t_0)}$. $|c-c_0|<\delta=\varepsilon$ шартын канааттандырган бул теңдеменин каалагандай чыгарылышы $x(t)=ce^{a(t-t_0)}$ болсун дейли. Анда $a<0$ болгондо, төмөнкүнү алабыз

$$|x(t)-\varphi(t)|=\left|ce^{a(t-t_0)}-c_0e^{a(t-t_0)}\right|=e^{a(t-t_0)}|c-c_0|<\varepsilon,$$

мындан

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-\varphi(t)|=|c-c_0|\lim_{t\to+\infty}e^{a(t-t_0)}=0,$$

б.а. чыгарылыш асимптотикалык туруктуу.

$a>0$ болгондо $|x(t)-\varphi(t)|=e^{a(t-t_0)}|c-c_0|$ айырмасы жетишээрлик чоң t лар үчүн абдан чоң сан болушу мүмкүн. Демек, $a>0$ болгондо чыгарылыш туруктуу эмес.

Эгерде $a=0$ болсо, анда чыгарылыш $\varphi(t)=c_0$ түрүндө болот. $|c-c_0|<\delta=\varepsilon$ шарты менен ар кандай $x(t)=c$ чыгарылышы үчүн төмөнкүнү алабыз

$$|x(t)-\varphi(t)|=|c-c_0|<\varepsilon.$$

Бирок $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)-\varphi(t)|=|c-c_0|\neq 0$, ошондуктан чыгарылыш туруктуу, бирок асимптотикалык туруктуу эмес.

(5.1.1) системасынын толкунданбаган $x=\varphi(t)$ кыймылын туруктуулукка изилдөө (5.1.1) системасына окшош башка системанын тынчтык чекитин - тривиалдык (нөлдүк) чыгарылышын туруктуулукка изилдөөгө алып келиниши мүмкүн.

Чындыгында эле, (5.1.1) системасында өзгөрмөлөрдү $y = x - \varphi(t)$ алмаштырууну жүргүзөлү. Жаңы система

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

түрүнө ээ болот. $F(t, y) \equiv f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$ белгилөө киргизүү менен

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y) \qquad (5.1.4)$$

системасын алабыз. Мында $t \ge t_0$ болгондо $F(t, 0) = 0$.

$y = \varphi(t)$ толкунданбаган чыгарылыш каралып жаткан өзгөрмөлөрдү алмаштырууда жаңы системанын $y = 0$ тынчтык чекитине өттү, ошентип, $x = \varphi(t)$ чыгарылышынын туруктуулук маселеси (5.1.4) системасынын нөлдүк чыгарылышынын туруктуулук маселесине өтөт.

Мисал 5.1.2. Ляпунов маанисинде туруктуулук аныктамасына таянып,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{t} x, \ t \ge 1$$

теңдемесинин $x(1) = 0$ баштапкы шарты менен аныкталган чыгарылышынын туруктуулугун аныктагыла.

Чыгаруу. Берилген теңдемени чыгарып, анын каалагандай $x(t)$, $x(1) = x_0$ чыгарылышы $x(t) = t^{\alpha} x_0$ түрүнө ээ экенин табабыз. $x(1) = 0$ шартын канааттандырган чыгарылыш $x_0(t) = 0$. Айырмасы $|x(t) - x_0(t)| = t^{\alpha} x_0$. Ошондуктан $t \to +\infty$ болгондо, эгерде $\alpha = 0$ болсо, $|x(t) - x_0(t)| = |x_0|$; эгерде $\alpha < 0$ болсо, $|x(t) - x_0(t)| = t^{\alpha} x_0 \to 0$ жана эгерде $\alpha > 0$ болсо, $x_0 \ne 0$ абсолюттук чоңдугу боюнча канчалык кичине болсо да $t \to +\infty$ болгондо $|x(t) - x_0(t)| \to \infty$. Демек, $x = 0$ чыгарылышы $\alpha \le 0$ болгондо туруктуу, анын үстүнө $\alpha < 0$ болгондо асимптотикалык туруктуу жана $\alpha > 0$ болгондо туруктуу эмес.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

№ 186. Төмөнкү теңдемелердин жана теңдемелер системаларынын көрсөтүлгөн баштапкы шарттарды канааттандырган чыгарылыштарын туруктуулукка изилдегиле:

а) $\frac{dx}{dt} = 1 + t - x, \quad x(0) = 0;$

б) $\frac{dx}{dt} = \sin^2 x, \quad x(0) = 0;$

в) $\dot{x} = t(x-1), \quad x(0) = 1;$

г) $\dot{x} = t - 1, \quad x(0) = -1;$

д) $\dot{x} = x + y, \dot{y} = x - y; x(0) = y(0) = 0;$

е) $\dot{x} = -2x - 3y, \dot{y} = x + y; x(0) = y(0) = 0.$

§ 5.2. Тынчтык чекиттердин жөнөкөй типтери

Көпчүлүк маселелерде фазалык мейкиндиктин $(0,\dots,0)$ чекитин туруктуулукка изилдөөдөн башка да траекториялардын бул чекиттин аймагында жайгашуусун аныктап билүү керек болот. Биз $n=2$ (фазалык тегиздик) учурду жана турактуу коэффициенттүү бир тектүү сызыктуу

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5.2.1}$$

системаны (4.3.1) кароо менен чектелебиз, мында

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(5.2.1) системасы теңдемелер системасынын оң жактары нөлгө айлана турган $x_1 = 0, x_2 = 0$ тривиалдуу чыгарылышына ээ, б.а. $(0, 0)$ чекити тынчтык чекити болуп саналат.

(5.2.1) системасынын фазалык траекториясын

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \tag{5.2.2}$$

теңдемесинин интегралдык ийри сызыгы катары кароого болоорун белгилей кетели.

(5.2.2) теңдемесинин оң жагы $(0, 0)$ чекитинде үзгүлтүктүү б.а. жашоо жана жалгыздык теоремасынын шарты бузулган. **2 гл.** терминологиясына ылайык, $(0,0)$ чекити <u>өзгөчө чекит</u> болуп саналат. Ошондуктан, $(0,0)$ чекити аркылуу (5.2.2) теңдемесинин бир да интегралдык ийри сызыгы өтпөшү жана ошондой эле бирден көп же чексиз көп интегралдык ийри сызыктар өтүшү мүмкүн деп алдын-ала айтабыз.

$(0,0)$ чекитинин айланасында траекториялардын жайгашуусу жана ошондой эле, алардын туруктуу же туруктуу эместик касиети A матрицанын мүнөздөгүч сандары, б.а.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.2.3)$$

мүнөздөгүч теңдеменин λ_1, λ_2 тамырлары аркылуу аныкталат.

Төмөнкүдөй учурлар болушу мүмкүн:

1^0. (5.2.3) мүнөздөгүч теңдемесинин λ_1, λ_2 тамырлары чыныгы жана ар түрдүү:

а) $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$. Тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу (“туруктуу түйүн”, 9-сүрөт.).

б) $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. Тынчтык чекити туруктуу эмес (“туруктуу эмес түйүн”, 10-сүрөт.).

в) $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$. Тынчтык чекити туруктуу эмес (“ээрче”, 11-сүрөт.).

2^0. (5.2.3) мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары комплекстүү сандар: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$;

а) $\alpha < 0, \beta \neq 0$. Тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу (“туруктуу фокус”,12-сүрөт.).

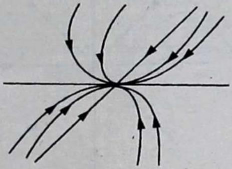
б) $\alpha > 0, \beta \neq 0$. Тынчтык чекити туруктуу эмес (“туруктуу эмес фокус”, 13-сүрөт.).

в) $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Тынчтык чекити туруктуу (“борбор”, 14-сүрөт.).

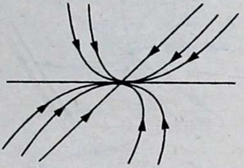
3^0. $\lambda_1 = \lambda_2$ тамырлары анык жана эки эселүү:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу ("туруктуу түйүн", 15, 16-сүрөт.).

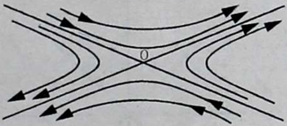
б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Тынчтык чекити туруктуу эмес ("туруктуу эмес түйүн", 17,18-сүрөт.).



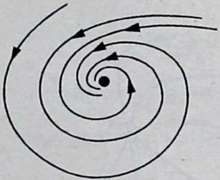
9-сүрөт



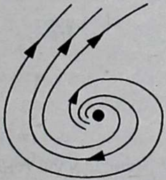
10-сүрөт



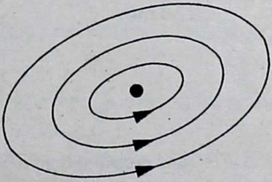
11-сүрөт



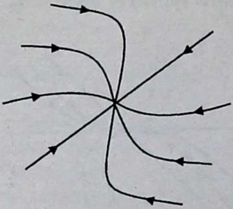
12-сүрөт



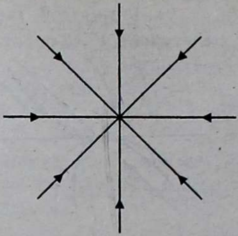
13-сүрөт



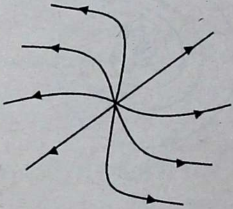
14-сүрөт



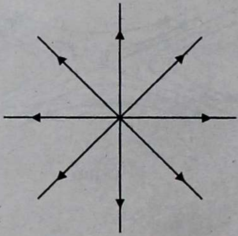
15-сүрөт



16-сүрөт



17-сүрөт



18-сүрөт

$\Delta \neq 0$ деп болжолдоонун негизинде мүнөздөгүч тендеменин жок дегенде бир тамыры нөлгө барабар болушу мүмкүн эмес.

Белгилей кетели, көрсөтүлгөн сүрөттөрдөгү траекториялардын схематикалык көрсөтүлүштөрүндө жебелер аркылуу t нын өсүү багыты белгиленген .

(5.2.1) системасы үчүн чекиттердин мындай классификациясы А. Пуанкареге тиешелүү. n өлчөмүнүн жогорулашы менен фазалык сүрөт өтө татаалданат, изилдөө үчүн көптөгөн методдор өнүккөн $[12]$ жаңы кубулуштар пайда болот.

Дифференциалдык теңдемелер системасынын фазалык портретин изилдөө дифференциалдык теңдемелердин сапаттык теориясы деп аталган маселелеринин бири болуп саналат.

Мисал 5.2.1. p заттык параметрине карата

$$\begin{cases} x = -x + py \\ y = x + 2y \end{cases}$$

системасынын мүнөзүн аныктагыла жана тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & p \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - (p+2) = 0$$

мүнөздөгүч теңдемеси $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9+4p}$ тамырларына ээ. p параметрине карата λ_1 жана λ_2 тамырларынын мүнөзүн изилдеп, төмөнкүлөрдү алабыз:

эгерде $p < -\frac{9}{4}$ болсо (тамырлары комплекстүү $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$) – туруктуу эмес фокус;

эгерде $-\frac{9}{4} \le p < -2$ болсо (тамырлары чыныгы жана оң) – туруктуу эмес түйүн;

эгерде $-2 < p$ болсо (тамырлары чыныгы жана ар түрдүү) – ээрче, тынчтык чекити туруктуу эмес.

Мисал 5.2.2. Сүрүлүүнү жана чөйрөнүн каршылыгы K ны эсепке алып, серпилгич термелүүлөрдүн

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad (5.2.4)$$

теңдемесин туруктуулукка изилдегиле ((3.10.1) теңдемесин карагыла).

Чыгаруу. (5.2.4) теңдемесинен ага эквиваленттүү

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2Ky - \omega^2 x \end{cases} \tag{5.2.5}$$

теңдемелер системасына өтөбүз.

(5.2.5) системасынын $(0,\ 0)$ тынчтык чекитинин мүнөзүн аныктоо үчүн

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2K-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } \lambda^2 + 2K\lambda + \omega^2 = 0$$

мүнөздөгүч теңдеме түзөбүз, мындан

$$\lambda_{1,2} = -K \pm \sqrt{K^2 - \omega^2}\ . \tag{5.2.6}$$

Төмөнкү учурларды карайбыз:

а) $K=0$ (чөйрөнүн каршылыгы жок). (5.2.6) дан $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ны алабыз. Тынчтык чекити-борбор туруктуу (бардык кыймылдар мезгилдүү болуп саналат);

б) $K > 0,\ K^2 - \omega^2 < 0.$ λ_1 жана λ_2 тамырлары түйүндөш комплекстүү, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}<0$. Тынчтык чекити – туруктуу фокус (термелүү басаңдайт);

в) $K>0,\ \ K^2 - \omega^2 \geq 0$ (чөйрөнүн каршылыгы өтө чоң $K \geq \omega$). λ_1 жана λ_2 тамырлары чыныгы жана терс. Тынчтык чекити - туруктуу түйүн (бардык чыгарылыштар басаңдоочу жана термелбөөчү).

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү системалардын тынчтык чекиттеринин мүнөзүн аныктагыла:

№ 187. $\dot{x} = x + 2y,\ \ \dot{y} = -3x + y$.

№ 188. $\dot{x} = -2x + \dfrac{1}{3}y,\ \ \dot{y} = -2x + \dfrac{1}{2}y$.

№ 189. $\dot{x} = -x + 3y,\ \ \dot{y} = -x + 2y$.

№ 190. $\dot{x} = -y,\ \ \dot{y} = x - 2y$.

№ 191. $\dot{x} = -6x - 5y, \quad \dot{y} = -2x - 5y$.

p параметринин кандай маанилеринде системанын тынчтык чекити туруктуу экенин аныктагыла:

№ 192. $\dot{x} = px - y, \quad \dot{y} = x + 2y$.

№ 193. $\dot{x} = -3x - py, \quad \dot{y} = -px + y$.

§5.3. Ляпунов функцияларынын методу

Ляпунов функцияларынын методу - (5.1.1) системасынын тең салмактуулук абалынын туруктуулугун ылайыктуу түрдө тандап алынган $V(t, x_1, ..., x_n)$ функциясынын - Ляпунов функциясынын жардамы менен түздөн-түз изилдөөдө турат, бул анын үстүнө системанын чыгарылышын алдын ала таппастан эле жүргүзүлөт.

Тынчтык чекити $x_k = 0$, $k = 1,2,...,n$, б.а. $f_k(0,...,0) = 0$ болгон

$$\dot{x}_k = f_k(x_1,...,x_n), \ k = 1,2,...,n \qquad (5.3.1)$$

автономдуу системаларды кароо менен чектелебиз.

Эгерде координаталар башталышынын кандайдыр бир аймагында аныкталган $V(x_1,...,x_n)$ функциясы

$$|x_k| \le h, \ k = 1, 2, ..., n \qquad (5.3.2)$$

областында (мында h – жетишээрлик кичине оң сан) бир гана аныкталган белгидеги маанилерди кабыл ала алса жана $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ болгондо гана нөлгө айланса, анда ал белгиси аныкталган (оң-аныкталган же терс-аныкталган) функция деп аталат. Мисалы, $n = 3$ болгон учурда $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ же $V = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ функциялары оң аныкталган болушат, мында $h > 0$ чоңдугу каалаганчалык чоң кылып алынышы мүмкүн.

Эгерде $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы (5.3.2) областында бир гана аныкталган белгидеги маанилерди кабыл ала алса, бирок

$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \neq 0$ болгондо да нөлгө айланышы мүмкүн болсо, анда ал белгиси туруктуу (оң же терс) деп аталат.

Маселен,

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

функциясынын белгиси туруктуу (он) болот. Чындыгында эле, $V(x_1, x_2, x_3)$ функциясын $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$ деп жазууга болот, мындан көрүнүп тургандай, ал $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ болгондо да, атап айтканда, $x_1 = 0$ жана $x_2 = -x_3$ барабардыгын аткарган каалагандай x_2, x_3 үчүн нөлгө айланат.

$V(x_1, x_2, ..., x_n)$ өз аргументтеринин дифференциалдануучу функциясы болсун жана $x_1, x_2, ..., x_n$ (5.3.1) дифференциалдык теңдемелер система-сын канааттандырган убакыттан көз каранды кандайдыр бир функциялар болушсун. Анда V функциясынын убакыт боюнча толук туундусу үчүн төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dV}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dV}{dx_k} \cdot f_k(x_1, x_2, ..., x_n). \quad (5.3.3)$$

(5.3.3) формуласы боюнча аныкталган $\frac{dV}{dt}$ чоңдугу - (5.3.1) теңдемелер системасынын жардамы аркасында түзүлгөн V функциясынын убакыт боюнча толук туундусу деп аталат.

Ляпуновдун төмөнкү теоремалары аткарылат:

Теорема 5.3.1 (туруктуулук жөнүндө). Эгерде (5.3.1) дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн белгиси аныкталган $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы (Ляпунов функциясы) жашаса жана (5.3.1) системасынын жардамы аркасында түзүлгөн убакыт боюнча $\frac{dV}{dt}$ толук туундусу, V га карама-каршы белгиге ээ же нөлгө теңдеш барабар болгон белгиси туруктуу функция болсо, анда (5.3.1) системасынын $x_k = 0, k = 1, 2, ..., n$ тынчтык чекити туруктуу.

Теорема 5.3.2 (асимптотикалык туруктуулук жөнүндө). Эгерде (5.3.1) дифференциалдык теңдемелер системалары үчүн

$V(x_1, x_2, ..., x_n)$ белгиси аныкталган функция табылса жана (5.3.1) системасынын жардамы аркасында түзүлгөн убакыт боюнча толук туундусу, V га карама-каршы белгидеги белгиси аныкталган функция болсо, анда (5.3.1) системасынын $x_k = 0$, $k = 1, 2,..., n$ тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу.

Теорема 5.3.3 (туруктуу эместик жөнүндө). (5.3.1) дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн $V(0, 0, 0)=0$ шартын аткарган координаталар башталышынын аймагында дифференциалдануучу $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы табылсын дейли. Эгерде (5.3.1) системасынын жардамы аркасында түзүлгөн анын $\frac{dV}{dt}$ толук туундусу оң аныкталган функция болсо жана $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы оң маанилерди ала тургандай координаталар башталышына жетишээрлик жакын чекиттер бар болсо, анда $x_k = 0$, $k = 1, 2,..., n$ тынчтык чекиттери туруктуу эмес.

Кыстырма. Ляпуновдун функциясы траектория чекитинен координаталар башталышына чейинки «жалпыланган аралыктын» ролун ойнойт. Ляпунов функциялары методунун мазмуну мындай: бул «жалпыланган аралык» системанын жардамы аркасында гарантиялуу түрдө кичиреет же чоңоёт.

Мисал 5.3.1. Ляпунов функциясынын жардамы аркасында

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -2y^3 - x$$

системасынын тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу. Ляпунов функциясы катары $V(x, y) = x^2 + y^2$ функциясын алабыз. Анда $\frac{dV}{dt} = 2x(-x+y) + 2y(-2y^3 - x) = -2(x^2 + 2y^4)$, жана V функциясы $\frac{dV}{dt}$ менен бирдикте **5.3.2**. теоремасынын шарттарын канааттандырат. Демек, системанын тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу.

Мисал 5.3.2.

$$\dot{x} = x(2 + \cos x), \quad \dot{y} = -y$$

системасынын тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу. $V = x^2 - y^2$ функциясын алабыз. Анда координаталар башталышынан башка бардык жерде

$$\frac{dV}{dt} = 2x^2(2 + cosx) + 2y^2 =$$

$$2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + y^2\right) > 0.$$

Мындан сырткары, $V > 0$ болгон (мисалы, $y=0$ түз сызыгында $V = x^2 > 0$), координаталар башталышына жетишээрлик жакын чекиттер табылат. Демек, **5.3.3** теоремасынын бардык шарттары аткарылды жана $O(0,\ 0)$ тынчтык чекити туруктуу эмес (ээрче).

Мисал 5.3.3. (4.5.4) системасынын тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу. $V(x,y)$ функциясы катары $V(x,y) = x^2 + y^2$ функциясын тандап алабыз. Бул функция оң аныкталган. V функциясынын туундусу (4.5.4) системасынын негизинде төмөнкүгө барабар:

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy = 0.$$

5.3.1 теоремасынан $O(0,\ 0)$ тынчтык чекити туруктуу экени келип чыгат. Бирок, асимптотикалык туруктуулук жок: берилген системанын траекториясы –айланалар жана алар $t \to +\infty$ болгондо $O(0,\ 0)$ чекитине умтулбайт («борбор» тибиндеги учур).

Ляпунов функциясын түзүүнүн жалпы методу жок. Жөнөкөй учурларда аны

$$V = ax^2 + by^2,\ V = ax^4 + by^4,\ V = ax^2 + bx^4$$

түрүндө издөөгө болот, мында $a>0,\ b>0$ турактуулары тиешелүү түрдө тандап алынат.

Мисал 5.3.4.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \dfrac{3}{2}y + 3xy^3 \\ \dot{y} = -x - \dfrac{1}{3}y + 2x^2y^2 \end{cases}$$

сызыктуу эмес системанын тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу. Ляпуновдун функциясын $V = ax^2 + by^2$, $a>0$, $b>0$ түрүндө издейли. Анда төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dV}{dt} = 2ax\left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3\right) + 2by\left(-x - \frac{1}{3}y + 2x^2y^2\right) =$$

$$= -\left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2\right) + \left(xy + 2x^2y^2\right)\cdot(3a - 2b).$$

$b = \frac{3}{2}a$ деп алсак, ар кандай $a>0$ үчүн $\frac{dV}{dt} = -a\left(2x^2 + y^2\right) \le 0$ дү алабыз. **5.3.2** теоремасынан системанын тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу экени келип чыгат.

Мисал 5.3.5.

$$\frac{dx}{dt} = ax^m + g(x)$$

теңдемесинин нөлдүк чыгарылышын туруктуулукка изилдегиле, мында m - натуралдык сан, $a \neq 0$, ал эми $g(0) = 0$ жана $g(x)$ функциясынын $x = 0$ чекитинин аймагында Тейлордун катарына ажыратылышы $k \ge m + 1$ - даражалуу мүчөлөрдөн башталат.

Чыгаруу. Оң аныкталган $V(x) = x^2$ функциясын карайлы. Анын туундусу алгачкы теңдеменин жардамы аркасында

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2ax^{m+1} + 2xg(x).$$

Эгерде $m-$ так сан $(m = 2p + 1)$ болсо, анда $\frac{dV}{dt}$ функциясы $x = 0$ чекитинин жетишээрлик кичине аймагында белгиси аныкталган болуп саналат, себеби $2a\,x^{m+1}$ функциясы ушундай, ал эми $x\,g(x)$ функциясынын Тейлор катарына $x = 0$ чекитинин аймагында ажыратылышы $m+2$ ден төмөн эмес даражалуу мүчөлөрдөн башталат. Ошондуктан $a < 0$ болгондо, **5.3.2** теоремасынын шарттары аткарылат, ал эми $a > 0$ болгондо, $V(x) = x^2$ функциясы **5.3.3**. теоремасынын шарттарын канааттандырат.

Эми m –жуп сан $(m = 2p)$ болсун. $V(x) = x$ функциясын карайлы жана анын t боюнча туундусун алгачкы теңдеменин жардамы аркасында эсептейли

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = ax^{2p} + g(x).$$

$x = 0$ чекитинин жетишээрлик кичине аймагында dV / dt туундусунун белгиси аныкталган болору көрүнүп турат. $V(x)$ функциясынын белгиси турактуу болбойт ($V(x)$ – белгиси өзгөрмөлүү функция, анын белгиси dV/dt нын белгисине карама-каршы). Анда **5.3.3**. теоремасына ылайык алгачкы теңдеменин нөлдүк чыгарылышы туруктуу эмес.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү системалардын тынчтык чекиттерин туруктуулукка изилдегиле:

№ 194. $\dot{x} = x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$.

№ 195. $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$.

№ 196. $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4 y$.

№ 197. $\dot{x} = -y + x^5$, $\dot{y} = x + y^5$.

№ 198. $\dot{x} = y + x^2 y^2 - \frac{1}{4}x^5$, $\dot{y} = -2x - 2x^3 y - \frac{1}{2}y^3$.

№ 199. $\dot{x} = -2x + 4xy^2$, $\dot{y} = y + 2x^2 y$.

№ 200. $\dot{x} = -3y - 2x^3$, $\dot{y} = 2x - 3y^3$.

§5.4. Биринчи жакындатуу боюнча туруктуулук

(5.3.1) системасынын оң жактары, б.а. $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функциялары координаталар башталышында каалаганчалык сандагы туундуга ээ болсун дейли. f_i функцияларын координаталар башталышынын аймагында Тейлордун формуласы боюнча ажыраталы:

$$f_i(x_1,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i+R_i(x_1,...,x_n),$$

мында $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i(0,...,0)}{\partial x_j}$, ал эми R_i – $x_1,...,x_n$ ге карата кичинелиги экинчи тартиптеги мүчөлөр. Анда алгачкы (5.3.1) системасы төмөнкүдөй жазылат:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+R_i(x_1,...,x_n),\ i=1,2,...,n.$$

(5.3.1) системасы үчүн биринчи жакындатуу системасы деп аталган

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\ (i=1,2,...,n),\ a_{ij}=const \qquad (5.4.1)$$

системасын карайлы.

Төмөнкү теорема туура:

Теорема 5.4.1. Эгерде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (5.4.2)$$

мүнөздөгүч теңдеменин бардык тамырлары терс заттык бөлүккө ээ болсо, анда (5.4.1) системасынын жана (5.3.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы $x_i\equiv 0,\ (i=1,2,\ n)$ асимптотикалык туруктуу.

Теорема 5.4.2. Эгерде (5.4.2) мүнөздөгүч теңдемесинин жок дегенде бир тамыры оң заттык бөлүккө ээ болсо, анда (5.4.1) системасынын жана (5.3.1) системасынын нөлдүк чыгарылышы туруктуу эмес.

5.4.1 жана **5.4.2** теоремалары учурларында (5.3.1) системасын биринчи жакындатуу боюнча туруктуулукка изилдөө мүмкүн деп айтышат.

Критикалык учурларда, б.а. (5.4.2) мүнөздөгүч теңдемесинин бардык тамырларынын заттык бөлүктөрү оң эмес болушса, жана дагы жок дегенде бир тамырдын заттык бөлүгү нөлгө барабар болсо, анда жалпысынан айтканда, биринчи жакындатуу боюнча туруктуулукка изилдөө мүмкүн эмес (R_i нин кичинелиги экинчи тартиптеги мүчөлөрү таасир кыла баштайт).

Мисал 5.4.1. $\dot{x} = 2x + y + 3y^2$, $\dot{y} = 3x + y + \dfrac{x^3}{3}$ системасынын $x = 0$, $y = 0$ тынчтык чекитин биринчи жакындатуу боюнча туруктуулукка изилдегиле.

<u>Чыгаруу</u>. Биринчи жакындатуу системасы $\dot{x} = 2x + y$, $\dot{y} = 3x + y$ болот. Сызыктуу система үчүн

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ же } \lambda^3 - 3\lambda - 1 = 0$$

мүнөздөгүч теңдемесин түзөлү. Мүнөздөгүч теңдеменин тамырлары $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{3}$ заттык сандар болушат жана $\lambda_1 > 0$. Демек, алгачкы системанын $x = 0$, $y = 0$ нөлдүк чыгарылышы туруктуу эмес.

Мисал 5.4.2.

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y \\ \dot{y} = \dfrac{1}{5}x - \sin y \end{cases}$$

системасынын $x = 0$, $y = 0$ тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

<u>Чыгаруу</u>. $e^x = 1 + x + \dots$, $\sin y = y - \dots$ функцияларын Тейлордун катарына ажыратып жана андан кичинелиги 1-тартиптеги мүчөлөрүн бөлүп алып, алгачкы системаны

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{4}x - 9y + R_1(x,y) \\ \dot{y} = \dfrac{1}{5}x - y + R_2(x,y) \end{cases}$$

түрүндө жаза алабыз, мында R_1, R_2 – x жана y ке салыштырмалуу кичинелиги 2-тартиптеги мүчөлөр. Алгачкы система үчүн тиешелүү биринчи жакындатуу теңдемелеринин системасы

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{4}x - 9y \\ \dot{y} = \dfrac{1}{5}x - y. \end{cases}$$

Анын мүнөздөгүч теңдемесинин тамырлары $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{8} \pm \frac{i}{2}\sqrt{\frac{451}{80}}$ терс заттык бөлүккө ээ. Ошентип, бул системанын жана да алгачкы системанын тынчтык чекити асимптотикалык туруктуу.

Мисал 5.4.3. Эгерде $\alpha\beta > -1$ болсо, анда

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sin(x + \alpha\, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta\, x + \ln(1 - y) \end{cases},$$

системасынын нөлдүк чыгарылышы асимптотикалык туруктуу экенин далилдегиле.

Чыгаруу. $\sin z$ жана $\ln(1-y)$ функцияларынын

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots, \qquad \ln(1 - y) = -y + \frac{y^2}{2} + \ldots$$

Тейлор катарына ажыратылыштарын эске алып, биринчи жакындатуу системасын жазалы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - \alpha\, y \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta\, x - y. \end{cases}$$

Ага туура келген мүнөздөгүч теңдеме: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 + \alpha\,\beta = 0$.

Эгерде $1 + \alpha\,\beta > 0$, б.а. $\alpha\,\beta > -1$ болсо, анда анын эки тамыры тең терс заттык мааниге ээ. Ошентип, берилүү шарты аткарылганда берилген системанын нөлдүк чыгарылышы асимптотикалык туруктуу болот.

Мисал 5.4.4.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - x\sin^2 x \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y^3 \end{cases}$$

теңдемелер системасынын тынчтык чекитин туруктуулукка изилдегиле.

<u>Чыгаруу</u>. Биринчи жакындатуу системасы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

түрүнө ээ.

Мүнөздөгүч тамырлары $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$. Демек, биз критикалык учурга жолуктук. Ошондуктан $V = x^2 + 3y^2$ функциясын киргизели.

Анда $\dfrac{dV}{dt} = 2x\left(3y - x\sin^2 x\right) + 6y\left(-x - y^3\right) = -\left(2x^2\sin^2 x + 6y^4\right) \le 0$.

Анын үстүнө $O(0,\ 0)$ чекитинин айланасында $x=y=0$ болгон учурда гана, $\dfrac{dV}{dt} = 0$.

Демек, **5.3.2** теоремасы боюнча берилген системанын нөлдүк чыгарылышы асимптотикалык туруктуу.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү берилген теңдемелер системаларынын тынчтык чекитинин биринчи жакындатуу боюнча туруктуулукка изилдегиле:

№ 201. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$ № 202. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y \\ \dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y. \end{cases}$

№ 203. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1. \end{cases}$ № 204. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin y \\ \dot{y} = -y - 2x. \end{cases}$

№ 205. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 1 - \cos y \\ \dot{y} = \sin^2 x + 1 - e^y. \end{cases}$ № 206. $\begin{cases} \dot{x} = 4\sin x + \ln(1 + y) \\ \dot{y} = x + y + x^2 y. \end{cases}$

№ 207. *Төмөнкү теңдемелер системаларынын тынчтык чекиттерин биринчи жакындатуу боюнча туруктуулукка изилдөөгө мүмкүн эмес экенин көргөзгүлө. Изилдөөнү Ляпунов функциялары методу менен жүргүзгүлө.*

а) $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^3\sin^2 x \\ \dot{y} = -3x - y^5. \end{cases}$

VI Глава. Кадимки дифференциалдык теңдемелерди чыгаруунун сандык методдору

§ 6.1. Багыттар талаасы (изоклиндер методу)

$y'(x)=f(x, y(x))$ (2.1.1) кадимки дифференциалдык теңдемеси $f(x,y)$ функциясы жашаган ар бир (x, y) чекитинде y' тин маанисин б.а. интегралдык ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентин аныктайт.

Эгерде D областынын ар бир чекитинде кандайдыр бир чоңдуктун мааниси берилсе, анда D областында ушул чоңдуктун талаасы берилген деп айтышат.

$(x;y;y')$ үчүлүк сандары (x,y) чекити аркылуу өтүүчү түз сызыктын багытын аныктайт. Бул түз сызыктардын кесиндилеринин жыйындысы багыттар талаасынын геометриялык сүрөттөлүшүн берет .

(2.1.1) дифференциалдык теңдемесин интегралдоо маселеси төмөндөгүдөй түшүндүрүлүшү мүмкүн: ар бир чекитиндеги жанымасы бул чекиттеги талаанын багыты менен дал келген багытка ээ болгон ийри сызыкты тапкыла.

Интегралдык ийри сызыкты түзүү маселеси көбүнчө изоклинди киргизүү менен чечилет.

Аныктама. Изделүүчү интегралдык ийри сызыктарга жүргүзүлгөн жанымалар бирдей багытка ээ болгон чекиттердин геометриялык орду изоклина деп аталат (б.а. изоклина деп бардык чекиттеринде талаанын багыттары бирдей ийри сызыкты айтабыз).

Берилген изоклинаны кесип өтүүчү бардык интегралдык ийри сызыктар кесилишүү чекиттеринде абсцисса огуна бирдей бурч менен жантайышат.

(2.1.1) дифференциалдык теңдемесинин изоклиндеринин түркүмү

$$f(x,y)=k \tag{6.1.1}$$

теңдеме менен аныкталат, мында k – параметр. k параметрине бири-бирине жакын сандык маанилерди берүү менен жетишээрлик жыш изоклина торчолорун алабыз, алынган изоклина торчолорунун жардамы менен (2.1.1) дифференциалдык теңдемесинин интегралдык ийри сызыктарын жакындатып түзүүгө мүмкүн болот.

Эскертүү 1. Нөлдүк изоклина $f(x,y)=0$ интегралдык ийри сызыктардын максимум жана минимум чекиттери жайгашып кала турган сызыктардын теңдемесин берет.

Интегралдык ийри сызыктарды тактап тургузуу үчүн ийрилүү чекиттеринин геометриялык ордун да табышат. Бул үчүн (2.1.1) теңдемесинин негизинде y'' ти табышат:

$$y''=\partial f/\partial x+(\partial f/\partial y)y'=\partial f/\partial x+f(x,y)\,\partial f/\partial y \qquad (6.1.2)$$

жана аны нөлгө барабарлайт.

$$\partial f/\partial x+f(x,y)\,\partial f/\partial y=0 \qquad (6.1.3)$$

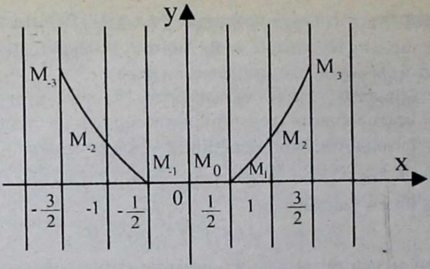
теңдемеси менен аныкталуучу сызык – мүмкүн болгон ийрилүү чекитеринин көптүгү болот.

Эскертүү 2. Эки же бир нече изоклиналардын кесилиш чекиттери (2.1.1) дифференциалдык теңдемесинин өзгөчө чекиттери болушу мүмкүн.

Эгерде (x_0,y_0) чекитинде $f(x, y)$ фукнциясы чексизге айланса, анда талаанын багыты ордината огуна параллель болот. Бул учурда «оодарылган» $dx/dy=1/f(x,y)$ дифференциалдык теңдемесин пайдалануу керек.

Эгерде (x_0,y_0) чекитинде $f(x, y)$ функциясы аныксыздыкты берсе (мисалы, $\frac{0}{0}$ түрүндөгү), анда бул чекитте талаа аныкталган жок деп айтышат. Мындай чекитти (2.1.1) дифференциалдык теңдемесинин өзгөчө чекити деп атайбыз.

$y'=f(x,y)$ теңдемесин жакындатып (графикалык) чыгаруу үчүн k нын бир нече маанилери үчүн тегиздикте изоклиналарды тургузабыз. $M_0(x_0,y_0)$ кандайдыр бир баштапкы чекит болсун. Бул чекит аркылуу өткөн L_0 изоклинасы k нын $k\equiv k_0=f(x_0,y_0)$ гө барабар маанисине туура келет. Бурчтук коэффициенти k_0 болгон M_0M_1 кесиндисин анын жанымасынын кесиндисине чейин жүргүзөбүз. Андан ары, $M_1(x_1,y_1)$ чекитинен бурчтук коэффициенти $k_1=f(x_1,y_1)$ болгон $M_1\,M_2$ жаңы кесиндини кийинки изоклина L_2 менен M_2 чекитинде кесилишкенге чейин жүргүзөбүз д.у.с.



19-сүрөт

Мындай тургузуунун натыйжасында, M_0 баштапкы чекити аркылуу өткөн интегралдык ийри сызыктын жакындатылган сүрөттөлүшү болуп саналган сынык сызыкты алабыз. Изоклиналардын торчосун канчалык жыш алсак, интегралдык ийри сызыкты ошончолук тагыраак алабыз.

M_0 баштапкы чекитинин абалын өзгөртүп, башка интегралдык ийри сызыктарды ушуга окшош жакындатып түзсө болот.

Мисал 6.1.1. $y' = 2x$ теңдемесинин координата башталышы аркылуу өткөн интегралдык ийри сызыгын изоклиналар методу менен тургузгула.

Чыгаруу. Берилген теңдеменин изоклиналары – вертикалдык жарыш түз сызыктар: $2x = k$. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ деп эсептеп, $x = 0$, $x = \pm 1/2$; $x = \pm 1$; $x = \pm 3/2$ д.у.с. изоклиналарын алабыз. Графигин түзөлү (координата октору жана вертикалдык түз сызыктар).

Координаталар башталышынан солго жана оңго багыт алып, $\ldots M_{-3}\ M_{-2}\ M_{-1}\ M_0\ M_1\ M_2\ M_{3\ldots}$ сынык сызыгын түзөбүз, анын звенолору тиешелүү түрдө $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ ге барабар болгон бурчтук коэффициенттерге ээ болушат. Бул сынык сызык интегралдык ийри сызыктын жакындатылган сүрөттөлүшү болот (19- сүрөт).

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

Изоклиналар методу менен төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин интегралдык ийри сызыктарынын түркүмүн жакындатып тургузгула:

№ 208. $y' = x + y$; № 211. $y' = y - x^2$;

№ 209. $y' = 1 + y$; № 212. $y' = y/(x + y)$;

№ 210. $y' = -y/x$; № 213. $y' = (y - 3x)/(x + 3y)$.

§ 6.2. Баштапкы маселени чыгаруунун сандык методдору

(2.1.1) теңдемеси үчүн

$$y(a) = y_0 \qquad (6.2.1)$$

Коши маселесинин сандык чыгарылышы изделген $\varphi(x)$ чыгарылышты x_i аргументинин кандайдыр бир $[a,b]$ кесиндисинде берилген

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b \qquad (6.2.2)$$

маанилери үчүн анын жакындатылган маанилеринин таблицасы түрүндө алууда турат. (6.2.2) чекиттерин түйүндүк чекиттери деп, ал эми бул чекиттердин көптүгүн $[a,b]$ кесиндисиндеги торчо деп аташат. Биз

$$h = (b - a) / m;\ x_i - x_{i-1} = h \text{ же } x_i = x_0 + i\,h\ (i = 1,\ldots, m) \qquad (6.2.3)$$

түрүндөгү кадамы h болгон бирдей өлчөмдөгү торчону пайдаланабыз.

Коши маселесинин сандык чыгарылыштарынын x_i чекиттериндеги жакындатылган маанилерин y_i аркылуу белгилейбиз; ошентип, $y_i \approx \varphi(x_i)$ ($i = 1, 2,\ldots, m$). Коши маселесинин каалагандай сандык чыгарылышы үчүн баштапкы шарт так аткарылат, б. а. $y_0 = \varphi(x_0)$.

$y_1,\ldots, y_m$ сандарын алуунун кандайдыр бир методу берилсин. Коши маселесин $[a,b]$ кесиндисинин торчосунда чыгаруунун мындай методунун катасы

$$d = max\ \{|\ y_k - \varphi(x_k)|\ 1 \le k \le m\}$$

чоңдугу менен б.а. жакындатылган чыгарылыш $(y_0, y_1,\ldots, y_m)$ жана так чыгарылыш $(\varphi(x_0), \varphi(x_1),\ldots, \varphi(x_m))$ векторунун ортосундагы аралыкты торчодогу m - норма боюнча аралык менен бааланат.

Эгерде d аралыгын h тан даражалуу $d < C h^p$, $p > 0$ функция менен чектегенге мүмкүн болсо, мында C - (2.1.1) теңдемесинин оң жагынан жана каралган методдон көз каранды болгон кандайдыр бир оң туруктуу сан, анда метод торчодо h кадамы боюнча p – тактыкка ээ деп айтышат. Эгерде бул (эсептөө каталыгын эске албаганда) барабарсыздык аткарылса, анда h кадамы нөлгө умтулаары менен эле d катасы дагы нөлгө умтулаары көрүнүп турат.

1^0. Эйлердин методу

Коши маселесин чыгаруунун эң жөнөкөй сандык методу Эйлердин, кээде аны Эйлердин сынык сызыктар методу деп аталган методу саналат.

$M_0(x_0, y_0)$ чекитинде интегралдык ийри сызыктын жанымасынын бурчтук коэффиценти

$$y_0' = f(x_0, y_0)$$

болсун.

Жаныманын $x_1 = x_0 + h$ абциссасына туура келген y_1 ординатасын табалы. M_0 чекитиндеги ийри сызыктын жанымасынын теңдемеси $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$ болгондуктан, $y_1 = y_0 + h\ f(x_0, y_0)$. $M_1(x_1, y_1)$ чекитиндеги бурчтук коэффициент дагы берилген дифференциалдык теңдемеден табылат: $y'_1 = f(x_1, y_1)$. Кийинки кадамда жаңы $M_2(x_2, y_2)$ чекитин алабыз, мында $x_2 = x_1 + h$, $y_2 = y_1 + h\ f(x_1, y_1)$. Ушундай схемадагы эсептөөлөрдү улантуу менен, $[a,b]$ кесиндисинин торчосунун (x_0, y_0) баштапкы маанилери жана h кадамы боюнча Коши маселесинин чыгарылышынын жакындатылган m маанилери үчүн Эйлердин формуласын алабыз:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + h\,f(x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \qquad (6.2.4)$$

Жакындатылган чыгарылыштын графикалык көрсөтүлүшү болуп $M_0, M_1, M_2, \dots, M_m$ чекиттерин удаалаш бириктире турган сынык сызык эсептелет. Ал сынык сызык Эйлер сынык сызыгы деп аталат. Эйлер методунун катасын

$$d \le \frac{1}{2} \max_{a \le x \le b} | h \varphi''(x) | \cdot h^2 m = \frac{1}{2} \max_{a \le x \le b} | \varphi''(x) | (b-a) h$$

барабарсыздыгы менен баалоого болот, б.а. бул метод 1-тартиптеги тактыкка ээ.

$h/2$ кадамы менен $x_i \in [a, b]$ чекитинде торчодо табылган чыгарылыштын каталыгын практикалык баалоону төмөнкү жакындатылган барабардык б.а. Рунге эрежесинин жардамы менен жүргүзсө болот:

$$|\varphi(x_i) - y_i(h/2)| \approx \frac{|y_i(h) - y_i(h/2)|}{2^p - 1}, \tag{6.2.5}$$

мында p – сандык методдун тактык тартиби. Ошентип, (6.2.5) формуласы боюнча алынган натыйжанын баалануусу эсептөөнү эки жолу: бир жолу h кадамы менен, экинчи жолу $h / 2$ кадамы менен жүргүзүүгө мажбур кылат.

Мисал 6.2.1. $y'' = x + y, \quad y|_{x=0} = 1$ Коши маселесин $[0; 0.4]$ кесиндисинде Эйлер методу менен чыгаргыла. Чыгарылышты бирдей өлчөмдөгү кадамы $h = 0.1$ болгон торчодо төрт чекитте тапкыла. Чыгарылышты ошол эле түйүндөрдө кадамды эки эсе азайтып, программанын жардамы менен (Тиркемени кара) тапкыла. Эсептөөнү $h = 0.05$ кадамы менен жүргүзүп, жакындатуу каталарын төмөнкү учурларда тапкыла:

а) (6.2.5) формуласынын жардамы менен;

б) так мааниси менен салыштырып;

Маселенин аналитикалык чыгарылышы

$$\varphi(x) = 2e^x - x - 1$$

түрүнө ээ.

Чыгаруу. Бул жерде $f(x, y) = x + y$; $m = 4$; $a = 0$; $h = (b - a) / m = 0,4 / 4 = 0,1$. Рекурренттик формулаларды колдонуп

$$x_0 = 0;\ y_0 = 1;\ x_i = x_{i-1} + 0.1;\ y_i = y_{i-1} + 0.1 \cdot (x_{i-1} + y_{i-1}) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

төмөнкүлөрдү удаалаш түрдө табабыз:

$i = 1$ болгондо $x_1 = 0.1;\ y_1 = 1 + 0.1 \cdot (0 + 1) = 1.1;$

$i = 2$ болгондо $x_2 = 0.2;\ y_2 = 1.1 + 0.1 \cdot (0.1 + 1.1) = 1.22;$

$i = 3$ болгондо $x_3 = 0.3;\ y_3 = 1.22 + 0.1 \cdot (0.2 + 1.22) = 1.362;$

$i = 4$ болгондо $x_4 = 0.4;\ y_4 = 1.362 + 0.1(0.3 + 1.362) = 1.5282$

$\widetilde{d}_i = \left|y_{i\ h} - y_{i\ (h\ 2)}\right|,\ d_i = \left|\varphi(x_i) - y_i(h/2)\right|$ деп белгилейли жана эсептөөнүн натыйжаларын таблицада көрсөтөбүз:

i	$_i$	$y_i/_h$	$y_i/_{h\,2}$	$\varphi(x_i)$	$\widetilde{d}_i$	d_i
1	.1	1.1	1.105	1.110342	0.005	0.005342
2	.2	1.22	1.231012	1.242805	0.011012	0.011793
3	.3	1.362	1.380191	1.399718	0.018191	0.019527
4	.4	1.5282	1.554911	1.583649	0.026711	0.028738

(6.2.5) формуласы боюнча эсептелген $y_i(h/2)$ чыгарылышынын каталарынын $\widetilde{d}_i$ баалоолору d_i четтөөлөрүнө жакын жана бул эки чоңдук $d \approx 0.03$ маанисине, 0.05 кадамы менен Эйлердин методу боюнча эсептөөдө алынган катага жетет. Салыштыруу үчүн: 0.1 кадамы менен эсептегендеги ката $d = /y_i - \varphi(x_i)/ = 0.06$ ны түзөөрүн белгилеп кетели.

2^0. Рунге-Кутт методу

Эгерде бир өлчөмдүү (6.2.3) торчодо (2.1.1) – (6.2.1) Коши маселесин чыгаруунун сандык методу төмөнкүдөй жол менен жүргүзүлсө, анда ал Рунге – Кутт методу болуп калат: эсептөө берилген (x_0, y_0), чекитинен башталат дагы:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1},$$

$$\Delta y_{i-1} = \sum_{j=1}^{p} d_j k_j^{[i-1]},\ k_i^{[i-1]} = hf(x_{i-1} + c_j h, y_{i-1} + c_j k_{j-1}^{[i-1]}),\ i=1..m. \quad (6.2.6)$$

рекуренттик формулалары менен чыгарылыш табылат.

h кадамы боюнча торчодо p- тартиптеги тактыкка ээ болгон метод p-тартиптеги Рунге – Кутт методу деп аталат. (6.2.6) формуласынын жардамы менен c_j жана d_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ коэфициенттеринин белгилүү маанилеринде гана p-тартиптеги тактыкты алышат; мында c_1 ди дайыма нөлгө барабар деп коюшат.

Бул коэфициенттерди төмөнкү схема боюнча эсептешет:

1) $f(x, y)$ функциясы талап кылынган тартипке чейин туундуга ээ деп божомолдоп, $\varphi(x_0 + h)$ так чыгарылышты жана анын жакындаштыруусун борбору x_0 болгон Тейлордун формуласы боюнча h^{p+1} тартиптеги кошулуучуга чейин ажыратылыш түрүндө көрсөтүшөт.

2) эки ажыратылыштагы h тын бирдей даражалуу окшош мүчөлөрүнүн барабарлап c_j жана d_j коэфициенттери табыла турган теңдемелерди алышат.

Эйлердин методун Рунге – Куттун 1-тартиптеги методу деп атоого болоорун белгилеп кетели. Чындыгында эле, $p = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$ үчүн (6.2.6) формулалары (6.2.4) катыштарына өзгөртүп түзүлөт:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}\ (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\Delta y_{i-1} = d_1 k_1^{[i-1]} = k_1^{[i-1]},\ k_j^{[i-1]} = h f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

же

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Эгерде $p = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 1/2$ болсо, Рунге – Куттун экинчи тартиптеги методун Эйлер –Кошинин методу деп аташат. Эйлер –Коши методунун алгоритми (6.2.6) формулаларынан келип чыгат:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1},\ \Delta y_{i-1} = 1/2\,[k_1^{[i-1]} + k_2^{[i-1]}]\ (i=1, \ldots, m),$$
$$k_1^{[i-1]} = h f(x_{i-1}, y_{i-1}),\ k_2^{[i-1]} = h f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + h f(x_{i-1}, y_{i-1})). \quad (6.2.7)$$

Практика жүзүндө чыгарылыштын каталыгын баалоо үчүн (6.2.5) формуласынан $p = 2$ деп алып, Рунге эрежесин колдонсо болот.

$p = 4$, $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = 1/2$, $c_4 = 1$, $d_1 = d_4 = 1/6$, $d_2 = d_3 = 1/3$ болгондогу Рунге – Куттун төртүнчү тартиптеги методун - Рунге –Куттун классикалык методу деп аташат.

(6.2.6) рекуренттик формулаларынан Коши маселесинин чыгарылыш алгоритмин Рунге –Куттун классикалык методу боюнча алабыз:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}\ (i = 1, 2, \dots, m),$$
$$\Delta y_{i-1} = [k_1^{[i-1]} + 2k_2^{[i-1]} + 2k_3^{[i-1]} + k_4^{[i-1]}],$$
$$k_1^{[i-1]} = h f(x_{i-1}, y_{i-1}),$$
$$k_2^{[i-1]} = h f(x_{i-1} + 1/2\, h,\ y_{i-1} + 1/2\, k_1^{[i-1]}),$$
$$k_3^{[i-1]} = h f(x_{i-1} + 1/2\, h,\ y_{i-1} + 1/2\, k_2^{[i-1]}),$$
$$k_4^{[i-1]} = h f(x_{i-1} + h,\ y_{i-1} + k_3^{[i-1]}). \qquad (6.2.8)$$

Дифференциалдык теңдеменин жакындатылган чыгарылышынын графиги болуп, $p_i\,(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, m)$ чекиттерин удаалаш туташтырган сынык сызык саналат. Сандык методдун тартиби чоңойгон сайын, сынык сызыктын звенолору - интегралдык ийри сызыктагы $(x_i,\ \varphi(x_i))$ чекиттерин удаалаш туташтырган $y = \varphi(x)$ интегралдык ийри сызыгынын хордалары түзгөн сынык сызыкка жакындай берет.

Төртүнчү тартиптеги сандык метод үчүн чыгарылыштын каталыгын практикалык баалоочу Рунге–Куттун (6.2.5) эрежеси төмөнкү түргө ээ:

$$|\varphi(x_i) - y_i(h/2)| \approx 1/15\,|y_i(h) - y_i(h/2)|.$$

Мисал 6.2.2. 6.2.1 мисалындагы Коши маселесин $[0;\ 0{,}4]$ кесиндисинде Рунге – Куттун классикалык методу менен чыгаргыла. 0.1 кадамы менен бир өлчөмдүү торчодогу чыгарылышын төрт түйүн чекитинде тапкыла.

Чыгаруу. $f(x,\ y) = x + y$ болгондуктан, (6.2.8) формулалары боюнча $i = 1, 2, 3, 4$ маанилери үчүн төмөнкүлөрдү алабыз:

$$k_1^{(i-1)} = h(x_{i-1} + y_{i-1}),\ \ k_2^{(i-1)} = h\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h + y_{i-1} + \frac{1}{2}k_1^{(i-1)}\right),$$

$$k_3^{(i-1)} = h\left(x_{i-1} + \frac{h}{2} + y_{i-1} + \frac{1}{2}k_2^{(i-10}\right),\ \ k_4^{(-1)} = h\left(x_{i-1} + h + y_{i-1} + k_3^{(i-1)}\right),$$

$$x_i = x_{i-1} + h,\ \ y_i = y_{i-1} + \frac{1}{6}\left[k_1^{(i-1)} + 2k_2^{(i-1)} + 2k_3^{(i-1)} + k_4^{(i-1)}\right],$$

$x_0 = 0,\ y_0 = 1$ деп алып, төмөндөгүлөрдү удаалаш табалы:

$i=1$ болсо:

$$k_1^{(0)} = 0.1(0+1) = 0.1;$$
$$k_2^{(0)} = 0.1(0 + 0.05 + 1 + 0.05) = 0.11;$$

$$k_3^{(0)} = 0.1(0 + 0.05 + 1 + 0.055) = 0.1105;$$

$$k_4^{(0)} = 0.1(0 + 0.1 + 1 + 0.1105) = 0.121050;$$

$$x_1 = 0 + 0.1 = 0.1; \quad y_1 = 1 + 1/6(0.1 + 2 \cdot 0.11 +$$

$$+ 2 \cdot 0.1105 + 0.12105) = 1.110342;$$

$i = 2$ болсо:

$$k_1^{(1)} = 0.1 \cdot (0.1 + 1.110342) = 0.1210342;$$

$$k_2^{(1)} = 0.1 \cdot (0.1 + 0.05 + 1.110342 + 0.0605171) = 0.1320859;$$

$$k_3^{(1)} = 0.1 \cdot (0.1 + 0.05 + 1.110342 + 0.06604295) = 0.1326385;$$

$$k_4^{(1)} = 0.1 \cdot (0.1 + 0.1 + 1.110342 + 0.1326385) = 0.1442980;$$

$$x_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2; \quad y_2 = y_1 + 1/6(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}) =$$

$$= 1.242805.$$

Андан ары төмөнкүлөрдү алабыз:

$i = 3$ болсо: $x_3 = 0{,}3; \quad y_3 = 1{,}399717;$

$i = 4$ болсо: $x_4 = 0{,}4; \quad y_4 = 1{,}583640.$

Алынган чыгарылыштын каталыгы $|y_4 - \varphi(x_4)| \approx 0.00000$ чоңдугунан ашпайт.

Жогоруда каралган бир эле Коши маселесинин сандык чыгарылыштары даана түшүнүктүү болуш үчүн төмөнкү бир таблицага келтирели:

i	x_i	Эйлердин	Эйлер-Кошинин	Рунге-Куттун	Так чыгарылышы $\varphi(x_i) = 2\,exp(x_i) - x_i - 1$
		методу менен табылган y_i нин маанилери			
0	0.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.1	1.1	1.11	1.110342	1.110342
2	0.2	1.22	1.24205	1.242805	1.242805
3	0.3	1.362	1.398465	1.399717	1.399718
4	0.4	1.5282	1.581804	1.583648	1.583649

Программанын жардамы менен (Тиркемени кара) ошол эле түйүндөрдө чыгарылышты тапса болот.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышын [a,b] кесиндисиндеги бир калыптагы торчодо – бир ирет h = 0.2 кадамы менен экинчи ирет 0.1 кадамы менен Эйлердин методу жана Рунге–Куттун классикалык методу менен тапкыла. Сандык чыгарылыштын каталыгын Рунге эрежеси боюнча баалагыла. Сандык чыгарылышты так чыгарылыш менен салыштыргыла, натыйжаларын таблица түрүндө көрсөткүлө.

№ 214. $y' = (1 + x y) / x^2$ $\quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = 1/2\,(x - (1/x))$.

№ 215. $y' = y - 2x/y,$ $\quad y|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1,$

$\varphi(x) = \sqrt{(2x + 1)}$.

№ 216. $y' = x + 3y/x,$ $\quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = x^2 (x - 1)$.

№ 217. $y' = x y,$ $\quad y|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1,$

$\varphi(x) = \exp(x^2/2)$.

№ 218. $y' = (y^2 + x y)/x^2,$ $\quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = x / (1 - \ln x)$.

№ 219. $y' = (1 - y + \ln x)/x,$ $\quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = \ln x$.

№ 220. $y' = (x + y)/x,$ $\quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = x \ln x$.

№ 221. $y' + 2xy = x\exp(x^2),$ $\quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1,$

$\varphi(x) = 1/2\,(x^2 \exp(x^2))$.

№ 222. $y'\, y + y\,\mathrm{tg}\, x = \sin 2x,$ $\quad y|_{x=0} = -1, \quad 0 \le x \le 1,$

$\varphi(x) = (1 - 2\cos x)\cos x$.

№ 223. $x\, y' - y^2 \ln x + y = 0,$ $\quad y|_{x=1} = 1, \quad 0 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = 1/(1 + \ln x)$.

№ 224. $x\, y' = x + y + x\exp(y/x),$ $\quad y|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 1{,}9,$

$\varphi(x) = x\ln x/(2 - x)$.

№ 225. $x^2\, y' - y = x^2 \exp(x - 1/x),$ $\quad y|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2,$

$\varphi(x) = \exp((x^2 - 1)/x)$.

№ 226. $(x^2 + 1)\, y' + x y - 1 = 0,$ $\quad y|_{x=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1,$

$$\varphi(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1} \;/\; \sqrt{x^2 + 1}\,).$$

§ 6.3. Четтик маселелер (прогонка методу)

Кесиндинин эки учунда берилген

$$y(a) = p\ ,\ y(b) = q \tag{6.3.1}$$

чектик шарттары менен

$$y''(x) = f(x,\ y(x)),\ a \le x \le b \tag{6.3.2}$$

дифференциалдык теңдеменин $y = y(x)$ чыгарылышын табуу керек болсун. Бул маселенин сандык чыгарылышынын эң жөнөкөй ыкмасын көрсөтөлү.

Жогоруда келтирилген $\{y_i\}$ белгилөөлөрдүн негизинде берилген кесиндиде дифференциалдык теңдеме айырмалар теңдемелери деп аталган алгебралык теңдемелердин системасын чыгарууга алып келет деп айтууга болот. Жогоруда келтирилген методдордо мындай системаларды чыгаруу жолу өзүнөн өзү белгилүү болчу. Ал эми четтик маселелер үчүн ал жол белгисиз.

Биринчи жана экинчи тартиптеги дифференциалдык операторлордун чектүү-айырмалар боюнча аппроксимацияланышынын формулаларын жазып алалы.

$x = x_i$ болгондо $y(x)$ функциясынын $y'(x)$ биринчи туундусун болжолдуу түрдө төмөнкүчө алмаштырсак болот:

оң бөлүнгөн айырма менен

$$y'(x_i) \approx (y(x_i + h) - y(x_i))\ /\ h \approx (y_{i-1} - y_i)\ /\ h; \tag{6.3.3о}$$

сол бөлүнгөн айырма менен

$$y'(x_i) \approx (y_i - y_{i-1})\ /\ h; \tag{6.3.3с}$$

борбордук бөлүнгөн айырма менен

$$y'(x_i) \approx (y_{i\ 1} - y_{i-1})\ /\ (2\ h). \tag{6.3.3б}$$

Экинчи туунду үчүн болжолдуу формуланы алыш үчүн жартылай кадам менен борбордук бөлүнгөн айырманын формуласын эки жолу колдонуу ыңгайлуу:

$$\begin{aligned}
&y''(x_i) = [(y'(x))'\ x = x_i \text{ болгондо}] \approx \\
&\approx (y'(x_i + h\ /\ 2) - y'(x_i - h\ /\ 2))\ /\ h \approx \\
&\approx (\ (y(x_i + h\ /\ 2 + h\ /\ 2) - y(x_i + h\ /\ 2 - h\ /\ 2))\ /\ h - \\
&- (y(x_i - h\ /\ 2 + h\ /\ 2) - y(x_i - h\ /\ 2 - h\ /\ 2))\ /\ h\ )\ /\ h = \\
&= (\ (y(x_i + h) - y(x_i))\ /\ h - (y(x_i) - y(x_i - h))\ /\ h\ )\ /\ h = \\
&= (\ (y(x_{i\ 1}) - y(x_i)) - (y(x_i) - y(x_{i-1})))\ /\ h^2 = \\
&= (\ y_{i\ 1} - 2\ y_i + y_{i-1}\ )\ /\ h^2.
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Эми (6.3.1) – (6.3.2) маселесине кайрылалы. $x = x_1, \ldots, x = x_{n-1}$ үчүн (6.3.4) формуласын колдонуп жана болжолдуу түрдөгү барабар белгисин так барабар белгисине алмаштырып, төмөнкү теңдемени алабыз:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 f(x_i, y_i),\ i = 1 .. n-1. \qquad (6.3.5)$$

Маселенин маңызы - математикалык формализм менен төп келишине көңүл бургула: бир жагынан (6.3.4) формуласын $x = x_0$ жана $x = x_n$ үчүн колдонууга болбойт, себеби, y_{-1} жана y_{n+1} жашабайт, ал эми экинчи жагынан (6.3.2) четтик шарттары ошол жетишпеген эки теңдемени берет

$$y_0 = p,\ y_n = q, \qquad (6.3.6)$$

жана (6.3.5) менен бирге n белгисизи бар n теңдемеден турган системаны берет.

Мындан ары жөнөкөйүрөөк болсун үчүн, $f(x, y)$ функциясын y боюнча сызыктуу болсун деп алабыз:

$$f(x, y) = A(x) + B(x)\,y.$$

Анда (6.3.5) теңдемелери сызыктуу болушат.
$A_i := A(x_i);\ B_i := B(x_i)$ деп белгилейли.

Системанын структурасын даана көрсөтүш үчүн, аны $n = 4$ үчүн жазып алалы:

$$\begin{aligned}
&y_0 = p,\\
&y_0 - 2y_1 + y_2 = h^2(A_1 + B_1 y_1),\\
&y_1 - 2y_2 + y_3 = h^2(A_2 + B_2 y_2),\\
&y_2 - 2y_3 + y_4 = h^2(A_3 + B_3 y_3),\\
&y_4 = q.
\end{aligned} \qquad (6.3.7)$$

Аны кеңейтилген матрица түрүндө жазып алалы («Сызыктуу алгебралык теңдемелердин системаларын чыгаруу» темасын эске салгыла):

1	0	0	0	0	$\mid p$
1	$-2-h^2B_1$	1	0	0	$\mid h^2A_1$
0	1	$-2-h^2B_2$	1	0	$\mid h^2A_2$
0	0	1	$-2-h^2B_3$	1	$\mid h^2A_3$
0	0	0	0	1	$\mid q$

Мындай система үч диагоналдуу деп аталат: башкы диагоналынан тышкары, нөлдүк эмес коэффициенттер ага жакынкы диагоналдарда дагы турушат. Силерге белгилүү болгон Гаусстун методун ушундай системага колдонуу прогонка методу деп аталат.

Эгерде n анча чоң болбосо, анда Гаусстун методун ишке ашырган стандарттык программаларды колдонсо болот. Эгерде n чоң болсо (мисалы, 100 дөн чоң жана $(n+1)$ $(n+2)$ эки өлчөмдүү массив компьютердин оперативдик эсине сыйбайт), анда прогонка методун түздөн-түз эле программаласак болот. Ал үчүн $(n-1)$ элементтен турган эки массив керек болот.

2-саптан биринчи сапты жана $(n-1)$-саптан n-сапты кемители жана төмөнкү белгилөөлөрдү жүргүзөлү:

$w_1 := h^2 A_1 - p,\ w_2 := h^2 A_2,\ \dots\ w_{n-2} := h^2 A_{n-2},\ w_{n-1} := h^2 A_{n-1} - q,$

$\alpha_k := 2 + h^2 B_k,\ k = 1..n-1,$

$(n-1)$ белгисизи бар $(n-1)$ теңдемелер системасын алабыз. Кайрадан аны $n = 4$ болгондо жазып алалы:

$-\alpha_1$	1	0	$\mid w_1$
1	$-\alpha_2$	1	$\mid w_2$
0	1	$-\alpha_3$	$\mid w_3$

h жетишээрлик кичине болсо α_k саны 2 ге жакын, б.а. оң болот.

Ар бир сапты биринчисинен баштап, α_k га бөлүп жана кийинки саптарга кошуп, эки диагоналдуу коэффициеттер матрицасын алабыз:

$-\alpha'_1$	1	0	$\mid w'_1$
0	$-\alpha'_2$	1	$\mid w'_2$
0	0	$-\alpha'_3$	$\mid w'_3$

Мында

$$\alpha'_1 = \alpha_1,\ w'_1 = w_1,\ \alpha'_k := \alpha_k - 1/\alpha'_{k-1},$$
$$w'_k := w_k + w'_{k-1}/\alpha'_{k-1},\ k = 2..\ n-1 \qquad (6.3.8)$$

Бул ыкма түз прогонка деп аталат.

Ар бир сапты акыркысынан баштап α_k га бөлүп жана алдыңкы саптарга кошуп, коэффициенттердин диагоналдуу матрицасын алабыз:

$-\alpha'_1$	0	0	$\mid w''_1$
0	$-\alpha'_2$	0	$\mid w''_2$
0	0	$-\alpha'_3$	$\mid w''_3$

Бул жерде

$$w''_{k-1} = w'_{k-1},\ w''_k := w'_k + w''_{k-1}/\alpha'_{k-1},$$

$$k = n-2..1 \text{ (кемүү тартибинде).} \qquad (6.3.9)$$

Бул операция тескери прогонка деп аталат.

Акыркы матрицадан (6.3.7) алгачкы системасынын чыгарылышын алып калабыз:

$$y_k = -w''_k / \alpha'_k,\ k = 1..\ n-1.$$

(Берилген процесстин $h \to 0$ болгондо жыйналуучулугун бере турган шарттарды карабайбыз.)

§ 6.4. Далилдөөчү - сандык методдор. Далил боло алуучу эсептөөлөрдүн жана интервалдык анализдин негиздери

Жогоруда жазылган жакындатылган методдорду колдонууда алар кандай («Рунге эрежеси» тибиндеги жакындатылган баалоолордон айырмаланган) тактыкты камсыз кылат деген суроо туулат. Бул үчүн эсептөө катасын так баалоо керек, бирок тажрыйба көрсөткөндөй, жетишээрлик татаал маселелер үчүн андай баалоо такыр эле мүмкүн эмес.

Ошондуктан *«далил боло алуучу эсептөө» - «доказательные вычисления»* [24] - *"validating computations"* деген термин киргизилген. Бул методго ылайык, дифференциалдык теңдемелер үчүн кандайдыр бир ырастоону далилдөө - бир нече так барабарсыздыктарды чектелген областтарда далилдөөгө алып келинет. Өз кезегинде, бул барабарсыздыктар компьютерде багытталып тегеректелген эсептөөлөр менен далилденет. Төмөндө мындай эсептөөлөрдү жүргүзүү жолдорунун бири көрсөтүлгөн.

Математикалык тактык менен компьютерде иштөөнүн ыңгайлуулугун айкалыштыруу үчүн интервалдык анализ келип чыккан (анын негиздерин жана дифференциалдык теңдемелерге колдонууну [17] де кара).

Аныктама. Интервалдык сан (төмөндө кыскача – интервал) деп $A = [a_-, a]$ жабык инервалы аталат (бул терминология математиканын башка бөлүмдөрүндөгү кабыл алынгандан айырмаланат). Эгерде A интервалын (a_-, a сандар түгөйүн) компьютерде көрсөтүүгө мүмкүн болсо, анда ал машиналык интервал деп аталат.

$wid(A) := a - a_-$ чондугу интервалдын туурасы деп аталат. Интервалдык вектордун (интервалдардын тобунун) туурасы деп анын компоненттеринин туураларынын максимумуму аталат. Интервалдардан андан татаал интервалдык объекттерди түзсө да болот.

Аныктама. Эгерде f саны (же башка объект) A интервалында (тиешелүү түрдө интервалдык объектте) жатса, анда A интервалы f санынын сырткы көрсөтүлүшү (машиналык сырткы көрсөтүлүшкө окшош) деп аталат.

Кыстырма. Сандык көптүктөрдөгү «так жогорку жана так төмөнкү грандарынын» белгиленишин колдонуп, сандардан турган ар түрдүү (чектелген) объекттин «эң жакшы» (эң ичке) сырткы көрсөтүлүштөрү үчүн - туюнтма жазууга мүмкүн. Бирок, жетишээрлик татаал болсо, анда андай түзүү мүмкүн эмес. Ошону менен бирге, маселелердин бардык шарттарын колдонуу андан кененирээк көрсөтүлүштөрдү түзүү мүмкүн жана ал жаңы жыйынтыктарды берет.

Мисал 6.4.1. $[3.1, 3.2]$ жана $[3\,^{10}/_{71}, 3\,^{1}/_{7}]$ интервалдары (Архимеддин натыйжасы) π саны үчүн сырткы көрсөтүлүштөрү болуп эсептелет; $[1.7, 1.8]$ жана $[1.73, 1.74]$ интервалдары $\sqrt{3}$ саны үчүн сырткы көрсөтүлүштөр.

Ар кандай сандык көптүктөр үчүн ушундай сырткы көрсөтүлүштөрдү түзүү бизге эсептөөлөрдүн далил боло ала турганын камсыз кылат.

Аныктама. f функциясынын аныкталуу областына кирген ар кандай (машиналык) интервалдык объект X боюнча: $x \in X$ шартынан $f(x) \in F$ келип чыга турган, F (машиналык) интервалдык объектин берген алгоритм - f функциясынын (машиналык) интервалдык көрсөтүлүшү деп аталат.

Бул аныктама, маселенин өзгөчөлүгүнө карата ар кандай түрдө колдонулат. Скалярдык учур үчүн келтирели:

$$X = [x_-, x\ ], F = [F_-, F\ ]:$$

$$x_- \le x \le x \text{ ден } F_-([x_-, x\ ]) \le f(x) \le F_-([x_-, x\ ]);$$

$$x \in X \text{ ден } f(x) \in [F_-(X), F\ (X)], \text{ ж.б.}$$

Бул аныктаманын арифметикалык амалдарга колдонулушу төмөнкү алгоритмдерди берет:

$$[x_-, x\ ] + [y_-, y\ ] = [x_- + y_-, x\ + y\ ], \tag{6.4.1}$$

$$[x_-, x\ ] - [y_-, y\ ] = [x_- - y\ , x\ - y_-], \tag{6.4.2}$$

$$\begin{aligned} [x_-, x\ ]\cdot[y_-, y\ ] = [\, &min\,(x_- y_-, x_- y\ , x\ y_-, x\ y_-), \\ &max\,(x_- y_-, x_- y\ , x\ y_-, x\ y\ )], \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

$$\begin{aligned} [x_-, x\ ] / [y_-, y\ ] = [\, &min\,(x_-/y_-, x_-/y\ , x\ /y_-, x\ /y\ ), \\ &max\,(x_-/y_-, x_-/y\ , x\ /y_-, x\ /y_-)], \\ &\text{эгерде } 0 \notin [y_-, y\ ]. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

Кыстырма 1. Эгерде операнддардын белгилери белгилүү болсо, анда (6.4.3) жана (6.4.4) формулаларын жөнөкөйлөтсө болот.

Кыстырма 2. Интервалды бүтүн даражага көтөрүү үчүн (6.4.3)–(6.4.4) төн алынган формулаларга караганда тагыраак формулаларды жазып алууга болот.

Машиналык интервалдар менен болгон арифметикалык амалдарды аткарууда, жалпы жонунан айтканда, өтө эле ичке интервалды алуу мүмкүн эмес, себеби алар машиналык эмес болуп калышы мүмкүн. Далилдениште камсыз кылуу үчүн бардык төмөнкү чектерин кеми менен, ал эми жогорку чектерин ашыгы менен тегеректеш керек. Мындай программалык жабдылыш, мисалы, [29] да түзүлүп чыккан. Жөнөкөйүрөөк маселелер үчүн бүтүн сандар менен болгон эсептөөлөрдү колдонсо болот.

Далил боло алуучу эсептөөлөрдүн төмөнкү маселеге колдонулушун көрсөтөбүз.

Мисал 6.4.2.

$$x^3 + 60 / x > 40 \ (3 \le x \le 5) \tag{6.4.5}$$

барабарсыздыкты далилдөө талап кылынат.

Чыгаруу. $f(x) = x^3 + 60/x \ (x > 0)$ функциясы үчүн интервалдык кеңейүүнү түзөбүз:

$$F([x_-, x\ ]) := [x_-, x\ ]^3 + 60/[x_-, x\ ] = [x_-^3 + 60/x\ , x\ ^3 + 60/x_-].$$

(6.4.5) барабарсыздыгын бардык кесиндиде далилдеп көрөбүз. Эсептейли:

$F_-([3, 5]) = 3^3 + 60 / 5 = 39 < 40$ – далилдене элек.

Кесиндини экиге бөлөбүз:

$F_-([3, 4]) = 3^3 + 60/4 = 42 > 40$ – далилденди;

$F_-([4, 5]) = 4^3 + 60/5 = 76 > 40$ – далилденди.

(6.4.5) барабарсыздыгы толугу менен далилденди. (Башка жол менен далилдей аласыңарбы?)

Барабарсыздыктарды далилдөөлөр жөнүндө, маселен, [31] ни карасак болот.

Бул мисалдан биз интервалдык анализдин артыкчылыгын көрсөк болот – татаал математикалык маселелерди чыгарууну көп сандаган жөнөкөй арифметикалык амалдарга алып келүү – компьютер менен айкалышылганда өзүн көрсөтөт.

Дифференциалдык теңдемелерди изилдеш үчүн, көпчүлүк учурда, алгебралык теңдемелердин жана алардын системаларынын гарантияланган чыгарылыштары зарыл болот.

$f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы менен берилген

$$f(x) = 0 \tag{6.4.6}$$

бир алгебралык теңдеме үчүн төмөнкү теорема аткарылат.

Теорема 6.4.1. Эгерде $F([x_-, x_-])\, F([x\ , x\ ]) > 0$ болгондой $x < x_-$ табылса (же табууга мүмкүн болсо), анда (6.4.6) теңдемеси $[x_-, x_-]$ интервалында жок дегенде бир чыгарылышка ээ. Эгерде $f(x)$ функциясы $f'(x)$ үзгүлтүксүз туундусуна ээ болсо жана ал туунду үчүн $G(x)$ интервалдык кеңейиши белгилүү болсо, анда $0 \notin G([x_-, x_-])$ шартынан бул чыгарылыштын жалгыздыгы келип чыгат.

Эки теңдемеден турган

$$F_1(x_1, x_2) = 0, F_2(x_1, x_2) = 0 \tag{6.4.7}$$

система үчүн нөлдүк эмес айландыруу принцибин колдонсо болот.

Теорема 6.4.2. Төмөнкү шарттар аткарылсын дейли:

1) (6.4.7) системасынын рационалдык чектери бар C областында чектүү сандагы чыгарылыштары бар жана бардык чыгарылыштары туруктуу болуп эсептелет;

2) F_1 жана F_2 функцияларынын интервалдык кеңейиштерин каалаганчалык так эсептөөчү алгоритм берилсин.

Анда (6.4.7) системасынын бардык чыгарылыштары каалаганчалык ичке чектерге төмөнкүдөй мааниде камалышы мүмкүн: каалагандай рационалдык $\varepsilon > 0$ үчүн, диагоналдары ε дон кичине болгон тик бурчтуктардын чектүү сандагы тобун түзүүгө мүмкүн жана бул тик буртуктардын ар бири жок дегенде бир чыгарылышты кармайт жана бул тик бурчтуктардын сыртында чыгарылыш жок.

§ 6.5. Баштапкы маселени чыгаруунун далил боло алуучу сандык методдору

(2.1.1), (6.2.1) баштапкы маселени чыгарууда далил боло алуучу эсептөөлөрдү колдонууну карайлы.

$f(x,y)$ үзгүлтүксүз функциясы менен бирге анын $F(X,Y)$ интервалдык кеңейиши берилсин деп эсептейли.

$y(a) \in Y_0 = [y_{0-}, y_{0+}]$ экендиги далилденген болсун жана $y(b)$, $b > a$ үчүн чектерди табуу талап кылынат.

Чыгарылышты жакындатып тургузуу менен бирге компьютердин жардамы менен анын жашашын жалпы далилдөө үчүн эки метод колдонулат жана жөнөкөй түрдө алар төмөнкүдөй болот.

Теорема 6.5.1. (Чыгарылыш үчүн областты тандап алуу)

Эгерде $Y_0 + [0, b-a]\ F([a, b], Y) \subseteq Y$ болгондой $Y = [y_-, y_+]$ интервалын тандап ала алсак, анда (2.1.1) теңдемесинин $[a, b]$ кесиндисинде жок дегенде бир $y = y(x)$ чыгарылышы жашайт жана $y(b) \in y_0 + (b-a)\ F([a, b], Y)$.

Теорема 6.5.2. (Чыгарылыш үчүн чектерди тандоо).

Эгерде $f(x,y_- + k_-(x-a)) > k_-$, $(x,y_+ + k_+(x-a)) < k_+$ $(x \in [a, b])$ эки барабарсыздыгы (траекториялар областтан чыкпайт) орун алгандай $Y_0 = [y_-, y_+]$ жана k_-, k_+, сандарын тандап ала алсак, анда (2.2.1) теңдемесинин $[a,b]$ кесиндисинде жок дегенде бир $y = y(x)$ чыгарылышы жашайт жана $y(b) \in [y_- + k_-(b-a))$, $y_+ + k_+(b-a)]$.

Биздин пикир боюнча, **6.5.2** теореманын методу эффективдүүрөк. Ошону менен бирге, эгерде $f(x, y)$ функциясынын аныкталгандагы жана бардык жерде үзгүлтүксүз экендиги алдын ала белгисиз болсо, анда областтын ичинде өзгөчө чекиттеринин жоктугун текшерүү керек, б. а. $F([a, b], Y)$ функциясын эсептөө керек.

§ 6.6. Автономдуу дифференциалдык теңдемелер үчүн функциялардын белгилери аныкталган областтарынын , жана туруктуулук областтарынын чектерин издөө

Көпчүлүк маселелерде автономдуу системалардын ((5.1.1) дин айрым учуру) фазалык мейкиндигин туруктуулукка изилдөө керек болот:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_n),\ i = 1,...,n, \tag{6.6.1}$$

анткени (6.6.1) системасын кандайдыр – бир чыгарылышын сандык методдорду колдонуп издөөдө зарыл шарт болуп, анын туруктуулугу эсептелет. Ошондуктан бирден бир негизги суроолордон болуп туруктуу областтарды (же оң инварианттууларды), б.а. $((x_1(t_0),..., x_n(t_0)) \in C)$ дан $((\forall t > t_0)(x_1(t),...,x_n(t)) \in C)$ келип чыга тургандарды издөө эсептелет. Мындай издөө үчүн

$$0 = \text{fi}(x),\ i = 1, 2,..., n,\ i = 1, 2,..., n,\ x \in R^n \tag{6.6.2}$$

түрүндөгү теңдемелердин системаларынан адегенде критикалык чекиттерди издөө мүмкүн.

Бир өлчөмдүү учурда критикалык чекиттердин жыйындысы (f_1 (x_1) функциясынын алардын ортосундагы белгилери менен кошо) толук фазалык сүрөттөлүштү берет (**теорема 6.4.1 ди кара**).

Эки өлчөмдүү учурда стационардык чекиттерди табуу татаалырак. Ал чекиттерди билүү ар дайым эле туруктуу областарды бере бербейт. Ал эми үч жана андан ашык теңдемелерден турган системалар үчүн стационардык чекиттер эч бир жарытаарлык нерсе бербейт. Андан башка, аларды издеп табууну жана алардын ар биринин тибин аныктоону алгоритмдештирүү татаал. Ошондуктан, мындай областтарды түздөн–түз издөө маселеси коюлган. Биз $n = 2$ (фазалык тегиздик) учуру менен чектелебиз.

[25]те тик бурчтуу туруктуу областтарды издөө алгоритми сунуш кылынган. (6.4.1) системасынын чыгарылышын гарантиялуу түрдө камтыган бардык жетишээрлик тар камтылган областтар үчүн, чыгарылышты камтыган жок дегенде бир жетишээрлик тар камтылган областты издөө үчүн [24]дө алгоритмдин тездетилген варианты сунуш кылынган.

Мисал 6.6.1. $\dot{x}_i = f_i(x_1,x_2),\ i=1,2,\ (x_1,x_2) \in D$ (6.6.3) дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн оң жакка туруктуу (оң инварианттуу) жок дегенде бир областын табуу керек.

Чыгаруу. ([26] дагы алгоритмди колдонобуз).

L ийри сызыгы менен чектелген область туруктуу болуш үчүн жана бул касиети f_i функциясынын кичине өзгөрүүсүндө дагы сакталышы үчүн L ийри сызыгына областтын ичин карай багытталган нормалдын вектору менен $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (f_1, f_2)$ векторунун арасындагы бурч 90^0 тан кичине болушу жетишээрлик жана зарыл болот. Эгерде L ийри сызыгында область сол жагында калгандай кылып багытты тандап алсак, анда $\bar{l} = (l_1, l_2)$ жаныма вектору үчүн нормалдын вектору $(-l_2, l_1)$ болот жана

$$F_D(x_1, x_2, l_1, l_2) = -l_2 f_1(x_1, x_2) + l_1 f_2(x_1, x_2) > 0 \qquad (6.6.4)$$

шартты алабыз. f_1, f_2 функциялары кандайдыр бир тик бурчтуу C областында аныкталган дейли жана H кадамы берилсин: $H = 1,\ 0 \le x_1 \le T_1,\ 0 \le x_2 \le T_2$, мында T_1, T_2 – натуралдык сандар. (6.6.3) системасы үчүн туруктуу область көп бурчтук D ны издейбиз, анын жактары $l^{(i)}$ векторлоруна параллель, мында $l^{(i)}$ – (сааттын жебесине каршы номерленген) x чекитиндеги ийри сызыкка жаныма вектор.

Ушуга дал келген алгоритмди жазалы:

Алгоритм үчүн алгачкы маалыматтар катары тик бурчтуу областтарда (б.а. интервалдык векторлордо) аныкталган индикатордук (бүтүн сандык маанилерди кабыл алган) функцияларды алабыз. Ушуга байланыштырылып алардын кандайдыр бир касиеттери: маанилүүлүгүнүн сакталышы жана туруктуулугу формулировкаланат. Индикатордук функциялардын маанилери конкреттүү маселелердин талаптарына жараша тандалып алынат.

Алгоритм 6.6.1. Алгачкы маалыматтар: индикатордук функция:

$$I_D(x,l) = \begin{cases} -1, & \text{эгерде } (x, x + l_i H) \text{ кесиндисинде } F_D < 0 \textit{ болсо}; \\ 0, & \text{эгерде аныкталбаса}; \\ 1, & \text{эгерде } (x, x + l_i H) \text{ кесиндисинде } F_D > 0 \textit{ болсо}; \\ 100, & \text{аныкталуу областынан чыгып кетсе}; \end{cases}$$

жана T_1, T_2 натуралдык сандар.

а) Төмөнкү C областында бүтүн сандуу чекиттерди $x^{(0)}$ тандайлы:

$$0 \le x_1 \le T_1 - 1, \ 0 \le x_2 \le T_2 - 1.$$

б) $k := 0$ деп алабыз.

в) $I_D(x^{(k)}, l^{(k)}, H) > 0$ жана $l^{(k)} \ne -l^{(k-1)}, (k > 0)$ шарттарын канааттандырган $l^{(k)}$ векторлорун тандайлы (эгерде мындай векторлор жашабаса, анда з) пунктуна өтөбүз).

Кыстырма: Мында жана төмөндө C областынын чегинен чыкпай турган векторлорду гана алабыз.

г) Мындай векторлордун ар бири үчүн төмөнкүнү текшеребиз: эгерде ал $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)}$ сынык сызыгын солдон оңго кесип өтсө, анда табылган областтан ЧЫГУУ. Эгерде кесип өтпөсө, анда ж) пунктуна өтөбүз. Эгерде оңдон солго кесип өтсө, анда:

д) Эгерде в) пунктундагы тандоо аяктабаса, анда ошол пунктка өтөбүз, андай болбосо

е) $k := k-1$ деп алабыз. Эгерде $k > 0$ болсо, анда в) пунктуна, андай болбосо з) пунктуна өтөбүз.

ж) $x^{(k+1)} := x^{(k)} + l_k, \ k := k+1$ деп алып, в) пунктуна өтөбүз.

з) Эгерде в) пунктундагы тандоо аяктабаса, анда ага өтөбүз, антпесе, эгерде а) пунктундагы тандоо бүтпөсө анда ага өтөбүз, андай болбосо «область табылган жок» деген маалымат менен ЧЫГУУ.

Мисал 6.6.2. Вируска каршы иммундук реакцияны сүрөттөгөн дифференциалдык теңдемелер системасынын стационардык чекиттерин издөөгө далил боло алуучу эсептөөлөрдү колдонуу.

[33] тө вируска каршы иммундук реакцияны сүрөттөгөн, өлчөмү жок өзгөрмөлөрү бар он теңдемеден турган система чыгарылган. Бардык туундуларды нөлгө барабарлоо төмөнкү алгебралык теңдемелердин системасын берет:

$$\begin{aligned}
&1)\ (h_1 + h_2 x_5)x_9 - h_3 x_1 x_8 - h_4 x_1 - (1 - x_{10} - x_9)x_1 = 0,\\
&2)\ h_6 x_1 - (h_7 + h_8 x_5)x_2 = 0,\\
&3)\ (h_9 \xi_{10} - h_{11} - h_{12} x_5)\, x_2 x_3 + h_{23}(1 - x_3) = 0,\\
&4)\ (h_{14} \xi_{10} - h_{16} - h_{17} x_6)\, x_2 x_4 + h_{18}(1 - x_4) = 0,\\
&5)\ ((h_{19}\xi_{10} - h_{21})\, x_2 x_3 - h_{23} x_2 - h_{22} x_9)\, x_5 + h_{24}(1 - x_5) = 0, \qquad (6.6.5)\\
&6)\ (h_{25} \xi_{10} - h_{27})\, x_2 x_4 x_6 + h_{28}(1 - x_6) = 0,\\
&7)\ h_{29} \xi_{10} x_2 x_4 x_6 + h_{31}(1 - x_7) = 0,\\
&8)\ h_{32} x_7 - h_{33} x_1 x_8 - h_{34} x_8 = 0,\\
&9)\ h_{35} x_1 (1 - x_{10} - x_9) - (h_{36} x_5 + h_{37})\, x_9 = 0,\\
&10)\ (h_{36} x_5 + h_{37})\, x_9 - h_{38} x_{10} = 0,
\end{aligned}$$

мында $\xi_{10} = 1 - x_{10}$ жана h_i коэффициенттери төмөнкү сандык маанилерге ээ ([33],117б.):

0.1	10^{-4}	0.1	10^{-4}	10^{-4}	0.5	0.02	10^{-4}	10^{-2}	1.0
10^{-3}	10^{-4}	0.05	10^{-2}	1.0	10^{-3}	10^{-4}	0.05	0.8	1.0
0.08	0.0005	10^{-4}	0.1	0.8	1.0	0.08	0.1	0.5	1.0
0.16	0.17	0.2	0.17	0.4	0.002	$0.12.$			

Тургузулуусу боюнча бул система, организмдин дени чыңдыгына туура келген стационардык чыгарылышка ээ (өзгөрмөлөрдүн маанилери 0 же 1 ге барабар):

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1,$$
$$x_6 = 1,\ x_7 = 1,\ x_8 = 1,\ x_9 = 0,\ x_{10} = 0. \qquad (6.6.6)$$

Башка стационардык чыгарылыштарды табуу үчүн далил боло алуучу издөөнү жүргүзөбүз.

Чыгаруу. Бул максат менен адегенде өлчөмдү кичирейтүү үчүн, кандайдыр бир өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз.

Эгерде $x_2=0$ ду койсок, (6.6.6) нын чыгарылышы пайда болоорун көрөбүз. Ошондуктан, $x_2 \to 0$ болгондо аныксыздыктар келип чыкпагандай өзгөртүүнү жүргүзөбүз жана $x_2 = 0$ деп алабыз. $d_i = 1 / h_i$, $i = 1..38$ деп белгилеп алып, (6.6.5) системадагы теңдемелерге койсок, $x_2 = v_1$, $x_5 = v_2$ эки белгисизи бар, эки теңдемеден турган системаны алабыз:

$$F_1(v_1 , v_2) = 0,\ F_2(v_1 , v_2) = 0. \qquad (6.6.7)$$

(6.6.5) теңдемелер системасы $[0,\ 1] \times X_5$ областында берилген шартты (мисалы, $x_7 \geq 1$) канааттандырган чыгарылышка ээ экендигин же болбосо мындай чыгарылышы жок экендигин далилдөө талап кылынат.

[24]төгү $[0,1] \times [0,20]$ областында алгоритм (**теорема 6.4.2**) боюнча эсептөө $0.132 < v_1 < 0.133,\ 17.50 < v_2 < 17.58$ областында жок дегенде бир чыгарылышы жашайт деген жыйынтыкты берген.

Ошондой эле, чыгарылыштын калган сегиз компоненттери үчүн гарантияланган чектер алынган:

$0.0057 < x_1 < 0.0061$ $0.1321 < x_2 \equiv v_1 < 0.1392$ $1.0094 < x_3 < 1.0100$

$0.9594 < x_4 < 1.0307$ $17.5040 < x_5 \equiv v_2 < 17.5741$ $20.3871 < x_6 < 20.6050$

$9.4410 < x_7 < 9.5175$ $9.3776 < x_8 < 9.4502$ $0.0530 < x_9 < 0.0563$

$0.0177 < x_{10} < 0.0188.$

VII Глава. Кичи параметр боюнча дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын ассимптотикасы

§7.1. Регулярдуу токунданыулар

Окуп-үйрөнүлүүчү дифференциалдык теңдемеде же ушундай теңдемелер системасында ар башка туруктуу маанилерди кабыл ала турган бир же бир нече параметрлер камтылышы көп кездешет. Жөнөкөйлүк үчүн биринчи тартиптеги теңдеме үчүн баштапкы маселени карайлы:

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x, \varepsilon),\ 0 \le x \le a,\ y(0, \varepsilon) = y_0 \qquad (7.1.1)$$

(мында ε – параметр). $(0, y_0)$ чекитин өзгөчө эмес деп эсептейбиз, б.а. берилген шарттар үчүн (7.1.1) маселесинин жалгыз чыгарылышы жашайт. Анда (7.1.1) теңдемесинин геометриялык маанисинен төмөндөгүлөр келип чыгат: эгерде (7.1.1) дин оң жагы ε дон үзгүлтүксүз көз каранды болсо, анда ε дун кичи өзгөрүүсү менен багыт талаасы аз эле өзгөрөт, ошондуктан $y(x, \varepsilon)$ чыгарылышы ε дон үзгүлтүксүз көз каранды болот.

(7.1.1) маселеси менен бирге төмөнкү маселени карайлы. Эгерде формалдуу түрдө $\varepsilon = 0$ десек, анда (7.1.1) маселесинен төмөнкү маселе келип чыгат.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, 0),\ y(0) = y_0. \qquad (7.1.2)$$

Жалпысынан айтканда, (7.1.2) маселеси алгачкы (7.1.1) маселесинен жөнөкөй жана анын чыгарылышын $\bar{y}(x)$ деп белгилесек, изилдөө жөнөкөй болот.

Теорема 7.1.1. Кандайдыр бир D областында жаткан y, x, ε өзгөрмөлөрү үчүн $f(y, x, \varepsilon)$ функциясы y жана ε боюнча ($n+1$) тартипке чейин (($n+1$) - кошо) үзгүлтүксүз жана бир калыпта чектелген айрым туундуларга ээ болсун дейли. Анда (7.1.1) маселесинин $y(x, \varepsilon)$ чыгарылышы үчүн

$$y(x,\varepsilon)=\bar{y}(x)+\varepsilon\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}(x,0)+\ldots+\frac{\varepsilon^{n}}{n!}\frac{\partial^{n} y}{\partial \varepsilon^{n}}(x,0)+\varepsilon_{n+1}(x,\varepsilon) \quad (7.1.3)$$

барабардыгы туура болгон *[0, h]*, $h>0$ сегменти жашайт, мында $\varepsilon\to 0$, $0\le x\le h$ болгондо, $\varepsilon_{n+1}(x,\varepsilon)\to 0$, анын үстүнө, $\varepsilon_{n+1}(x,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$, $\varepsilon\to 0$ ($f(x)=O\left(x^{\alpha}\right)$ жазуусу $x\to 0$ болгондо $\dfrac{f(x)}{x^{\alpha}}$ катышы чектелген боюнча калат дегенди билдирет).

(7.1.3) формуласы $y(x,\varepsilon)$ чыгарылышынын ε кичи параметри боюнча ассимтотикалык формуласы (же асимптотикалык көрсөтүлүшү) болуп саналат. Кичи параметр боюнча асимптотикалык формулалар деп төмөнкү шартты канаттандырган формулаларды айтабыз: формуланын калдык мүчөлөрү деп аталган кээ бир мүчөлөрү так эмес жазылат, алардын $\varepsilon\to 0$ болгондогу касиеттери гана көрсөтүлөт, мисалы, $\varepsilon\to 0$ болгондогу нөлгө умтулуу тартиби.

7.1.1 теоремасы теңдемедеги кичи мүчөлөрдү алып салуунун физика жана техника үчүн «кадыресе» операциясынын математикалык негиздөөсүн берет. Бул кичи мүчөлөр көп учурда толкундануулар деп аталат. Ушуга байланыштуу (7.1.2) теңдемеси толкунданбаган теңдеме деп аталат, ал эми (7.1.1) теңдемеси толкунданган теңдеме деп аталат. ε кичи параметри боюнча асимптотиканы негиздөө теориясы - толкундануулар теориясы деп аталат.

7.1.1. теоремасы (7.1.1) дин оң жагынын y жана ε боюнча жетишээрлик жылмакайлык шарттары учурунда туура. **7.1.1**. теоремасынын талабына баш ийген толкундануулар регулярдуу толкундануулар деп аталат. Ушуну менен бул параграфтын аталышы да түшүндүрүлөт.

Практикада (7.1.3) түрүндөгү көрсөтүлүштү алуу үчүн *y(x, ε)* функциясынын айрым туундусун эсептешпейт (бул үчүн адегенде ушул функцияны табуу керек болор эле), бирок чыгарылышты төмөнкү түрдө издешет:

$$y(x,\varepsilon)=\bar{y}(x)+\varepsilon\, y_1(x)+\varepsilon^{2}\, y_2(x)+\ldots \quad (7.1.4)$$

мында $y_i=y_i(x)$ $i=1,2,\ldots$ – азырынча x тен белгисиз функциялар.

(7.1.4) тү (7.1.2) нин экинчи барабардыгына коюп, y_1 функциясы үчүн баштапкы шартты алабыз:

$$\bar{y}(0)+\varepsilon\, y_1(0)+\varepsilon^{2} y_2(0)+\ldots=y_0,$$

мындан

$$\bar{y}(0)=y_0,\; y_1(0)=y_2(0)=\ldots=0. \qquad (7.1.5)$$

Андан ары (7.1.4)тү (7.1.1)ге коюп, оң жагын ε дун даражалары боюнча ажыратып жана ε дун бирдей даражалуу мүчөлөрүн барабарлап, $y_1(x)$, $y_2(x)$,… ды аныкташ үчүн, баштапкы шарттары (7.1.5) болгон сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин тизмегин алабыз.

Мисал 7.1.1.

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)+\varepsilon\, c(x)y^{2},\quad y(0)=0 \qquad (7.1.6)$$

маселесинин $y(x,\varepsilon)$ чыгарылышынын асимптотикалык формуласынын эки мүчөсүн тапкыла.

Чыгаруу. (7.1.6) Рикаттинин теңдемеси жана анын чыгарылышын эффективдүү алууга мүмкүн эмес. Ошондуктан (7.1.6) маселесинин чыгарылышын

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon\, y_1(x)+\ldots$$

түрүндө издейбиз, мында $y_0(x)$, $y_1(x)$ азырынча x тен белгисиз функциялар. Бул барабардыкты (7.1.6)га коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$y'_0(x)+\varepsilon\, y'_1(x)+\ldots=a(x)[\,y_0(x)+\varepsilon\, y_1(x)+\ldots]+b(x)+$$
$$+\varepsilon\, c(x)[\,y_0(x)+\varepsilon\, y_1(x)+\ldots]^{2},\; y_0(0)+\varepsilon\, y_1(0)+\ldots=0.$$

Мындан $y_0(x)$ жана $y_1(x)$ функцияларын аныктоо үчүн ε дун бирдей даражалуу мүчөлөрүн барабарлап, төмөнкү катыштарга ээ болобуз:

$$\frac{dy_0}{dx}=a(x)y_0+b(x),\quad y_0(0)=0,$$

демек,

$$y_0(x)=\int_0^x b(\tau)exp\Big(\int_\tau^x a(\tau)\,d\tau\Big)\,d\tau;$$

$$\frac{dy_1}{dx}=a_1(x)y_1+c(t)y_0^{2},\; y_1(0)=0$$

жана

$$y_1(x) = \int_0^x c(\tau) y_0^2(\tau) exp\left(\int_\tau^x a(s)ds \right) d\tau;$$

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon\, y_1(x) + \varepsilon_2(x,\varepsilon),$$

мында $\varepsilon_2(x,\varepsilon) \to 0$ жана $\varepsilon_2(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0.$

Мисал 7.1.2.

$$y' = \frac{x}{1+\varepsilon xy}, \quad y(0) = 0 \tag{7.1.7}$$

баштапкы маселенин чыгарылышынын ε кичи параметринин даражалары боюнча асимптотикалык көрсөтүлүшүн тапкыла.

Чыгаруу. $\varepsilon = 0$ болгондо (7.1.7) маселеси оңой эле чыгат, анда $\bar{y} = \dfrac{x^2}{2}$ алынат. Ошондуктан маселенин чыгарылышын (7.1.4) түрүндө издейбиз

$$y = \frac{x^2}{2} + \varepsilon\, y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \ldots,$$

(7.1.7)ге коюу, теңдеменин эки жагын бөлүмүнө көбөйткөндөн кийин төмөнкүнү берет:

$$\left(x + \varepsilon\, y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \varepsilon^3 y_3' + \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} x^3 + \varepsilon^2 x y_1 + \varepsilon^3 x y_2 + \ldots \right) = x \tag{7.1.8}$$

$$y(0) = \varepsilon\, y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \ldots = 0. \tag{7.1.9}$$

(7.1.8) дин кашааларын ачып ε дун бирдей даражаларынын алдындагы туюнтмаларды нөлгө барабарлап удаалаш түрдө төмөнкүлөрдү алабыз:

$$y_1' + \frac{1}{2} x^4 = 0, \qquad y_2' + \frac{x^3}{2} y_1' + x^2 y_1 = 0,$$

$$y'_3 + \frac{x^3}{2} y_2' + x y_1 y_2' + x^2 y_2 = 0,$$

....

Мындан (7.1.9) барабардыгын эске алып, төмөнкүнү табабыз:

$$y_1 = -\frac{x^5}{10}, \quad y_2 = \frac{7}{160} x^3, \quad y_3 = \frac{-71}{1760} x^{11} \ldots.$$

Ошондуктан (7.1.4) формуласы төмөнкүнү берет:

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\varepsilon}{10}x^5 + \frac{7\varepsilon^2}{160}x^8 - \frac{71\varepsilon^3}{1760}x^{11} + \dots .$$

Тургузулган катар **7.1.1** теоремасынын негизинде (7.1.7) маселесинин чыгарылышынын ε кичи параметри боюнча асимптотикалык көрсөтүлүшү болуп саналат. Мында $n = 1$ деп эсептөө мүмкүн.

Мисал 7.1.3.

$$y' = sin(xy), \quad y(0) = \varepsilon \tag{7.1.10}$$

баштапкы маселенин чыгарылышынын ε кичи параметринин даражалары боюнча асимптотикалык көрсөтүлүшүн тапкыла.

Чыгаруу. (7.1.1) жалпы маселесинен айырмаланып, мында параметр баштапкы шартка кирет. $\varepsilon=0$ болгондо (7.1.9) маселеси $y=0$ деген чыгарылышка ээ болору анык. Ошондуктан кичи $|\varepsilon|$ үчүн чыгарылышты төмөнкү түрдө издейбиз:

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$$

$$(y_i = y_i(x),\ i = 1, 2, \dots). \tag{7.1.11}$$

$x = 0$ маанисин коюу, төмөнкүлөрдү берет:

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0, \dots \tag{7.1.12}$$

Экинчи жагынан, (7.1.11)ди дифференциалдык теңдемеге койсок, синустун даражалуу катарын эске алып, төмөнкү барабардыкты алабыз:

$$\varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \varepsilon^3 y_3' + \dots = \frac{(\varepsilon x y_1 + \varepsilon^2 x y_2 + \varepsilon^3 x y_3 + \dots)}{1!} - \frac{(\varepsilon x y_1 + \varepsilon^2 x y_2 + \varepsilon^3 x y_3 + \dots)^3}{3!} + \dots$$

ε дун бирдей даражаларынын коэффициенттерин барабарлоо төмөнкүнү берет:

$$y_1' = x y_1,\ y_2' = x y_2,\ y_3' = x y_3 - \frac{x^3 y_1^3}{3!} \dots .$$

Бул рекурренттүү сызыктуу теңдемелерди интегралдап, (7.1.12) баштапкы шартты эске алып, төмөнкүнү табабыз:

$$y_1 = e^{\frac{x^2}{2}}, \; y_2 = 0, \; y_3 = \frac{1}{12}\left(1-x^2\right)e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Бул туюнтмаларды (7.1.11) ге коюу (7.1.10) маселесинин чоң эмес $|x|$ жана $|\varepsilon|$ үчүн жарамдуу ажыратылышын берет.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын кичи параметр ε дун даражалары боюнча ажыралышынын эки-үч мүчөсүн таптыла

№ 227. $y' = 4\varepsilon x - y^2, \; y(1) = 1.$

№ 228. $y' = 2/y - 5\varepsilon x, \; y(1) = 2.$

№ 229. $xy' = \varepsilon x^2 + \ln y, \; y(1) = 1.$

№ 230. $y' = 6\varepsilon / x - y^2, \; y(1) = 1 + 3\varepsilon.$

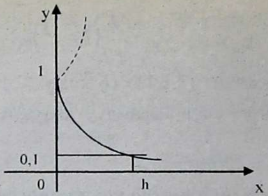
№ 231. $y' = e^{y-x} + \varepsilon y, \quad y(0) = -\varepsilon.$

§7.2. Сингулярдуу толкундануулар

Колдонууларда, теңдемеге кирген ε параметринин кээ бир маанилеринде тендеме өз тартибин төмөндөтүп жибериши, б.а. кулпурушу көп кездешет. Ушуну менен бирге жаңы кырдаал келип чыгат. Аны мисал менен түшүндүрөбүз.

$$\varepsilon y' + y = 0, \; y|_{x=0} = 1 \qquad (7.2.1)$$

маселесин карайлы. Маселенин чыгарылышы $y=exp(-x/\varepsilon)$. $\varepsilon = 0$ болгондо теңдеменин кулпурушу келип чыгат. Чыгарылыш $x \geq 0$ жана $\varepsilon \to +0$ учурда каралсын дейли. Бул чыгарылыш 20-сүрөттө көрсөтүлгөн. (7.2.1) теңдемеси пределинде $y=0$ барабардыгына айланат. Бирок ε кичи саны үчүн чыгарылыш $x=0$ дөн эмес $x=h$ тан кийин гана нөлгө жакын экенин көрөбүз. «Чектик катмар» деп аталган $0 \leq x < h$ аралык (7.2.1)дин бирдик чыгарылышынын баштапкы шартынан нөлгө жакын мааниге өтүүсү үчүн керек.



20-сүрөт

«Чектик катмардын туурасы» түшүнүгү шарттуу, анткен теория боюнча чыгарылыш эч кайсы жерде нөлгө барабар болбойт. Мисалы, эгерде чектик катмардын туурасы үчүн алгачкы маанилери менен салыштырганда чыгарылыштын мааниси 10 эсе кичирейген $x = h$ маанисин алсак, төмөнкүгө ээ болобуз

$$exp(-h/\varepsilon) = 0{,}1; \quad h = ln10 \cdot \varepsilon,$$

б.а. чектик катмардын туурасы ε дун маанисине пропорционалдуу.

Эгерде $\varepsilon \to -0$ болсо, анда 20-сүрөттө пунктир менен көрсөтүлгөндөй келип чыккан чыгарылыш каалаган $x > 0$ үчүн чексизге умтулат. Бул учур бизди аз кызыктырат.

Мындан, мурунку параграфтан айырмаланып, ε кичи параметринин белгиси чечүүчү мааниге ээ экени көрүнүп турат. Ошондуктан главанын аягына чейин $\varepsilon > 0$ деп алабыз.

(7.2.1) теңдемесин төмөнкү түрдө жазууга болот

$$y' = -\frac{y}{\varepsilon} \tag{7.2.2}$$

мындан (7.2.2)нин оң жагы $\varepsilon = 0$ болгондо үзгүлтүккө учурары көрүнүп турат. Ошол үчүн мурунку параграфтын негизги талабы - оң жактарынын үзгүлтүксүздүгү аткарылган жок. Башка сөз менен айтканда бул учурда оң жак ε дон <u>регулярдуу эмес</u> б.а. <u>сингулярдуу</u> түрдө көз каранды. Ошондуктан $\varepsilon\, y'$ типтеги толкундануулар адабиятта сингулярдуу толкундануу деген атты алган.

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.2.3}$$

дифференциалдык теңдемесин карайлы. Суроо төмөнкүдөй коюлат: кандай шарттарда $|\varepsilon|$ дун кичи мааниси үчүн (7.2.3) дифференциалдык теңдемеден $\varepsilon(dy/dx)$ мүчөсүн алып таштап, (7.2.3) түн чыгарылышынын жакындатылган чыгарылышы катары

$$f(x,y)=0 \qquad (7.2.4)$$

«кулпурулган теңдеменин» чыгарылышын кароого болот. Аныктык үчүн $\varepsilon > 0$ болсун жана (7.2.4) кулпурган теңдеме бир гана $y=\varphi(x)$ чыгарылышына ээ жана ал жылмакай болсун дейли. $f(x,y)$ функциясынын (7.2.4) теңдемесинин $y=\varphi(x)$ чыгарылышына жакын жердеги мүнөзүнө жараша: (7.2.3) дифференциалдык теңдемесинин $y(x,\varepsilon)$ чыгарылышы $\varepsilon\to 0$ болгондо кулпурган теңдеменин $y=\varphi(x)$ чыгарылышына жакындайт, же болбосо андан тез алыстайт.

(7.2.4) теңдемесинин $y=\varphi(x)$ чыгарылышы биринчи учурда туруктуу, ал эми экинчи учурда <u>туруктуу эмес</u> деп аташат.

Атап айтканда, эгерде (7.2.4) кулпурган теңдеменин $y=\varphi(x)$ чыгарылышынын графиги аркылуу өткөндө $f(x,y)$ функциясы y тин өсүшү менен x фиксирленген болгондо, (+) белгисинен (–) белгисине өзгөрсө, анда кулпурган теңдеменин чыгарылышы туруктуу жана (7.2.3) дифференциалдык теңдемесинин $y(x,\varepsilon)$ чыгарылышын аны менен жакындатып алмаштырса болот (21-сүрөт.).

Эгерде $f(x,y)$ функциясы (–) тан (+) ка белгисин өзгөртсө, анда (7.2.4) кулпурган теңдемесинин $y=\varphi(x)$ чыгарылышы туруктуу эмес жана (7.2.3) теңдемесинин $y(x,\varepsilon)$ чыгарылышын (7.2.4) кулпурган теңдеменин чыгарылышы менен алмаштырууга болбойт. (22-сүрөт.).

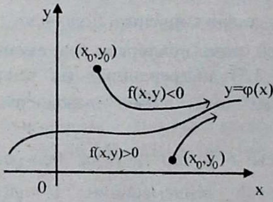
Төмөнкү теоремаларда туруктуулук жана туруктуу эместиктин жетиштүү шарттары берилген.

Теорема 7.2.1. 1) Эгерде (7.2.4) теңдемесинин $y=\varphi(x)$ чыгарылышында $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ болсо, анда кулпурган теңдеменин $y=\varphi(x)$ чыгарылышы туруктуу .

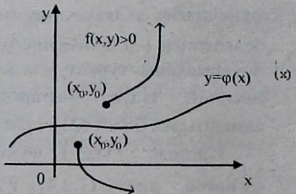
2) Эгерде (7.2.4) теңдемесинин $y=\varphi(x)$ чыгарылышында $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$ болсо, анда кулпурган теңдеменин $y=\varphi(x)$ чыгарылышы туруктуу эмес.

Эгерде $f(x, y) = 0$ кулпурган теңдеме бир нече $y=\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ чыгарылышка ээ болсо, анда алардын ар бири туруктуулукка карата изилденүүсү тийиш. (x_0, y_0) баштапкы чекитке, б.а. баштапкы шартты тандаганга карата (7.2.3) дифференциалдык теңдемесинин интегралдык ийри сызыгынын мүнөзү $\varepsilon \to 0$ болгондо ар түрдүү болушу мүмкүн.

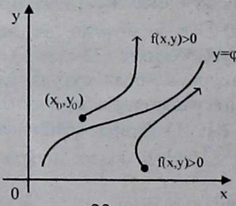
Жарым туруктуу учур да кездешет. Мында $f(x,y)$ функциясы ийри сызык аркылуу өткөндө белгисин өзгөртпөйт (мисалы, эгерде $y=\varphi(x)$ - (7.2.4) кулпурган теңдеменин жуп эселүү тамыры болсо). Бул учурда ε кичи саны үчүн (7.2.3) теңдемесинин интегралдык ийри сызыктары бир жагынан $y=\varphi(x)$ ийри сызыгына жакындайт, ал эми экинчи жагынан андан алыстайт (23-сүрөт.).



21-сүрөт



22-сүрөт



23-сүрөт

Биринчи учурда (x_0, y_0) баштапкы чекити жарым туруктуу $y = \varphi(x)$ чыгарылыштын өзүнө тартуу областына, ал эми экинчи учурда түртүү областына таандык деп айтабыз.

Жарым туруктуу учурда, эреже катары, (7.2.3) алгачкы теңдемесинин чыгарылышын (7.2.4) кулпурган теңдеменин чыгарылышы менен алмаштырууга болбойт.

(7.2.3) теңдемесинин интегралдык ийри сызыктары (x_0, y_0) баштапкы чекитин ылайыктуу тандап алганда, кулпурган теңдеменин $y=\varphi(x)$ чыгарылышына умтула турган жана $x > x_0$ болгондо анын аймагында кала турган критерийлерди көрсөтүү мүмкүн, бирок бул (7.2.3) теңдемесинде толкундануу болбогон кезде гана туура болот.

Бул критерийлерди келтирели.

Теорема 7.2.2. (7.2.4) кулпурган теңдемесинин жарым туруктуу $y=\varphi(x)$ чыгарылышынын айланасында $f(x,y)\geq 0$ дейли. Эгерде $\varphi'(x)>0$ болсо, анда (7.2.3) теңдемесинин $y=\varphi(x)$ ийри сызыгына жакындаган интегралдык ийри сызыктары бул ийри сызыкты кесип өтпөйт жана $x > x_0$ болгондо, анын аймагында калат. (Мында (x_0,y_0) баштапкы чекити $y=\varphi(x)$ жарым туруктуу чыгарылышынын тартуу областында жайгашуусу тийиш, эгерде (x_0,y_0) баштапкы чекити түртүү областында жатса, (7.2.3) теңдемесинин тиешелүү интегралдык ийри сызыгы $y=\varphi(x)$ ийри сызыгынан тез алыстайт (22-сүрөт)).

Эгерде $\varphi'(x)<0$ болсо, анда $y=\varphi(x)$ функциянын графигине жакындаган интегралдык ийри сызыктар аны кесип өтөт жана $y=\varphi(x)$ ийри сызыгынын экинчи жагынан тез алыстайт. Эгерде $x_0<x<x_1$ болгондо $\varphi'(x)>0$ жана $x>x_1$ болгондо $\varphi'(x)<0$ болсо, анда жетишээрлик кичи ε саны үчүн $y=\varphi(x)$ тамырынын тартуу областында жайгашкан (x_0,y_0) чекитинен чыккан интегралдык ийри сызыктар $x_0+\delta<x<x_1+\delta$ болгондо, $y=\varphi(x)$ ийри сызыгына жакын кала берет; $x=x_1$ чекитинин айланасында алар $y = \varphi(x)$ ийри сызыгын кесишет, анан андан алыстайт.

Эгерде $y=\varphi(x)$ жарым туруктуу чыгарылышынын айланасында $f(x,y)\leq 0$ болсо, анда жогоруда айтылган ырастоолордун аткарылышы үчүн $\varphi'(x)$ туундусундагы белгилерди карама-каршы белгилер менен алмаштыруу керек.

Мисал 7.2.1.

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = x^2 - y,\ \varepsilon > 0 \qquad (7.2.5)$$

теңдемесинин $y\big|_{x=x_0} = y_0$ баштапкы шартты канааттандырган $y = y(x,\varepsilon)$ чыгарылышы $y=x^2$ кулпурган теңдеменин $x > x_0$ жана $\varepsilon > 0$ болгондогу чыгарылышына умтулушун аныктагыла.

Чыгаруу. Кулпурган теңдеменин чыгарылышы $y=x^2$ туруктуу, себеби $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 - y)}{\partial y} = -1 < 0$. Демек алгачкы теңдеменин (x_0, y_0) каалаган баштапкы чекиттен чыккан $y = y(x,\varepsilon)$ чыгарылышы $\varepsilon \to 0$ жана $x > x_0$ болгондо кулпурган теңдеменин чыгарылышына умтулат.

(7.2.5) дифференциалдык теңдемесин сызыктуу бир тектүү эмес теңдеме катары чыгарып, түздөн-түз текшерүү аркылуу ишенүү мүмкүн. Берилген $y\big|_{x=x_0} = y_0$ баштапкы шарты боюнча төмөнкүнү табабыз:

$$y(x,\varepsilon) = \left(y_0 - x_0^2 + 2\varepsilon x_0 - 2\varepsilon^2\right) e^{-\frac{x-x_0}{\varepsilon}} + x^2 - 2\varepsilon x + 2\varepsilon^2,$$

мындан $x>x_0$ жана $\varepsilon\to 0$ болгондо, $y(x,\varepsilon) \to x^2$ болоору түздөн-түз көрүнүп турат.

Мисал 7.2.2.

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = y(e^y - 2)$$

дифференциалдык теңдеме үчүн кулпурган теңдеменин чыгарылышынын туруктуулугун изилдегиле.

Чыгаруу. $y(e^y - 2) = 0$ кулпурган теңдеме эки чыгарылышка ээ

1) $y = 0$, 2) $y = \ln 2$.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0} = \left(e^y - 2 + ye^y\right)\Big|_{y=0} = -1$ ге ээ болобуз, ошондуктан $y \equiv 0$ чыгарылышы туруктуу;

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=ln\,2} = \left(e^y - 2 + y\,e^y\right)\Big|_{y=ln\,2} = 2\,ln\,2 > 0\,,$$

демек, кулпурган теңдеменин $y \equiv ln\,2$ чыгарылышы туруктуу эмес.

Мисал 7.2.3.

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = (y-x)^2$$

теңдемеге жооп берген кулпурган теңдеменин чыгарылышын туруктуулукка изилдегиле.

Чыгаруу. $(y-x)^2 = 0$ кулпурган теңдеме $y=x$ эки эселүү тамырга ээ. Бул тамырдын айланасында $f(x,y) = (y-x)^2 > 0$, $\varphi(x) = x$ жана $\varphi'(x) = 1 > 0$.

Демек, $y = x$ чыгарылышы жарым туруктуу жана эгерде $(x_0\,,\, y_0)$ баштапкы чекити $y = x$ түз сызыгынын астындагы жарым тегиздикте жатса ($y > x$ тамырынын тартылуу областы), анда $(x_0,\, y_0)$ чекитинен чыккан $y = y(x,\mu)$ интегралдык ийри сызыгы, $x > x_0$ болгондо, $y = x$ сызыгынын аймагында калат.

Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр

Төмөнкү дифференциалдык теңдемелер үчүн кулпурган теңдемелердин чыгарылышын туруктуулукка изилдегиле (жогорудагы (7.2.4) кулпурган теңдеменин чыгарылыштарын туруктуулукка изилдөөсүн карагыла):

№ 232. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = y - x^2$.

№ 233. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = y\left(x^4 + 1 - y\right)$.

№ 234. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = (y-x)\left(y - e^x\right)$.

№ 235. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$.

№ 236. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = yx$.

№ 237. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = (y+x)^2$.

№ 238. $\varepsilon\frac{dy}{dx} = y - x + 1$.

7.3. Сингулярдык толкундануулар үчүн далил боло алуучу эсептөөлөр

1^0 Бир сингулярдык теңдеме учуру

(7.2.3) сингулярдык - толкунданган теңдемелерди жана системаларды изилдөө үчүн аналитикалык методдорду колдонуу белгилүү функциялардын айрым класстары үчүн гана мүмкүн. Адаттагы сандык методдор (**VI** гл. кара) параметри "кичи" маанилерге ээ болсо дагы жакындатылган чыгарылыштарды чектүү маанилер үчүн гана берет, б.а. чыгарылыштардын асимптотикасын тапканга мүмкүнчүлүк бербейт, ошондуктан бир калыптагы сандык методдор иштелип чыккан (мис. [16]дагы обзорду кара).

$h > 0$ кадамы жана кичи параметри ε үчүн :

$exp\left(-\frac{h}{\varepsilon}\right) \in \left[0, exp\left(-\frac{h}{\varepsilon_0}\right)\right]$ $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$ негизги катнашын пайдалануу менен интервалдык анализдин негизинде бул методдордун далилдөөчү модификациясы болушу мүмкүн, бирок ал өтө татаалдашкан жана белгилүү функциялар үчүн бир далай чектөөлөрдү талап кылат. Биз [20] траекториялардын өздөрүн тургузбай туруп сингулярдык толкунданган системалардын чыгарылыштарынын асимптотикаларын түзүү үчүн, областтарды далилдеп издөөчү методдорду [26] колдондук, анда эсептөөлөрдүн көлөмү параметрдин маанисинен көз каранды болбойт.

Кайрадан (7.2.3) теңдемесин баштапкы шарты менен карайлы:

$$\varepsilon y'(t) = f(t, y(t)),\ t_0 \le t \le T, \quad (7.3.1)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (7.3.2)$$

мында t_0, T, y_0 – берилген сандар, $f(t, y)$ – берилген функция.

ε жетишээрлик кичи болгондо, бул маселенин $y(t, \varepsilon)$ чыгарылышы үчүн, ε-дон көз каранды эмес жетишээрлик тар чектерди табуу талап кылынат.

Аныктама. (t,y) тегиздигиндеги оң жана сол жагынан $t=t_0, t=T$ түз сызыктары менен, ал эми жогору жана төмөн жагынан сынык сызыктар менен чектелген жана t огу менен сынык сызыктардын вектор - кесиндилеринин арасындагы бурч 90^0 дан чоң эмес болгон эки өлчөмдүү областты t боюнча функционалдык деп атайбыз.

Лемма 7.3.1. Эгерде f функциясы

$$D=[t_0,T]\times[y_1,y_2],\ (\forall t\in[t_0,T])\ (f(t,y_1)>0, f(t,y_2)<0)$$

тик бурчтугунда аныкталган жана үзгүлтүксүз болгондой $y_1<y_2$ жашаса жана $y_0\in[y_1,y_2]$ болсо, анда (7.3.1) – (7.3.2) маселеси каалаган ε үчүн чыгарылышка ээ (жалгыздыгы милдеттүү түрдө эмес).

Далилдөө. f функциясынын үзгүлтүксүздүгүнөн чыгарылыштын локалдык жашашы (узартылышы) орун алат (**3.1.1 теоремасын** кара), ал эми **лемманын** шартынан чыгарылыштын траекториясы $y=y_2$ (өсүү учурунда) жана $y=y_1$ (кемүү учурунда) түз сызыктарын кесип өтө албайт.

Теорема 7.3.1. Эгерде $y(t_-)\in[y_-,y_+]$ болсо, P нын жогорку жана оң чекитеринде $f(t,y)<0$ болсо, мында $P=[t_-,t_+]\times[y_-,y_+]\subset D$ (интервалдык вектор) тик бурчтук, анда жетишээрлик кичи ε үчүн чыгарылыштын траекториясы P нын оң чегин кесип өтпөйт (б.а. P нын төмөнкү чегин кесип өтөт).

Ушундай эле, эгерде P нын төмөнкү жана оң чекте-ринде $f(t,y)>0$ болсо, анда траектория P нын жогорку чегин кесип өтөт.

Далилдөө (теореманын биринчи бөлүгү үчүн). Үзгүлтүксүздүктүн негизинде, төмөнкү касиетке ээ болгон δ жана ω он сандары жашайт ($0<\delta<<1$ жана $0<\omega<<1$): 1) $y_+-\delta\le y\le y_+$ болсо жана да $t_+-\delta\le t\le t_+$ болсо, $f(t,y)<-\omega$; жана 2) бул областта $y(s_+)<y(s_-)-\omega(s_+-s_-)/\varepsilon$, $s_-<s_+$ катнаштары орун алат.

Эгерде траектория $[t_-,t_-]\times[y_+-\delta,y_+]$ кесиндисин кесип өтсө, анда $\varepsilon<\omega(t_+-\delta-t_-)$ үчүн ал $[t_-,t_+-\delta]\times[y_+-\delta,y_+-\delta]$ кесиндисин да кесип өтөт. Демек, траектория $[t_+-\delta,t_+-\delta]\times[y_+-\delta,y_+]$ кесиндисин кесип өтө албайт. Эгерде ал $[t_+-\delta,t_+-\delta]\times[y_+-\delta,y_-]$ кесиндисин кесип өтсө, анда $\varepsilon<\omega\delta/(y_+-y_-)$ үчүн ал $[t_+-\delta,t_+]\times[y_-,y_-]$ кесиндисин кесип өтөт, б.а. $[t_+,t_+]\times[y_+,y_-]$ кесиндисин кесип өтпөйт.

Бул теоремадан түздөн -түз төмөнкү теорема келип чыгат.

Теорема 7.3.2. $P=[t_-,t_+]\times[y_-,y_+]$, $\varepsilon<<1$, $y(t_-)\in[y_-,y_+]$ болсун. Эгерде $[t_+,t_+]\times[y_+,y_+]$ жогорку чегинде жана оң чегинин жогоркуга жандаш $[t_+,t_+]\times[y_{p+},y_+]$ бөлүгүндө $f(t,y)<0$ болсо жана $[t_-,t_+]\times[y_-,y_-]$ төмөнкү чегинде жана $[t_+,t_+]\times[y_-,y_{p-}]$ оң чегинин төмөнкү жандаш бөлүгүндө $f(t,y)>0$ болсо, анда $y(t_+)\in[y_{p-},y_{p+}]$.

Төмөнкү далил боло алуучу эсептөөлөрдүн алгоритми лемманын шартында аракет кылат.

Алгачкы берилген маалыматтар: $[t_0,T]$- аргументтин өзгөрүү интервалы (рационалдык); баштапкы маанилери үчүн $[y_{0-},y_{0+}]$ интервалы (рационалдык); $f(t,y)$ функция-сынын $F([t_-,t_+]\times[y_-,y_+])$ интервалдык кеңейишин эсептөө үчүн алгоритм; y боюнча кадам h_y оң рационалдык сандары, t боюнча кадам h_t оң рационалдык сандары.

Функционалдык областтын чегинин бөлүгүн түзгөн болжолдонгон вектор кесиндисинин багыт индикатору болгон N санын киргизебиз.

Жогорку чекти издөөнүн алгоритми:

а) $t_+:=t_0$; $y_+:=y_{0+}$; $N:=-1$ деп алабыз.

б) Эгерде $N:=-1$ болсо. анда $t_{1+}:=t_+$; $y_{1+}:=y_+-h_y$ деп алабыз.

Эгерде $N := 0$ болсо, анда $t_{1+} := t_+ + h_t$ деп алабыз.

Эгерде $N := 1$ болсо, анда $t_{1+} := t_+;\ \ y_{1+} := y_+ + h_y$ деп алабыз жана “г” пунктуна өтөбүз.

в) $t_- := t_+;\ \ y_- := y_+;\ \ t_+ := t_{1+};\ \ y_+ := y_{1+};$ деп алабыз.

$f_+ := F_+([t_-, t_+] \times [y_-, y_+])$ функциясын эсептейбиз.

Эгер-де $f_+ < 0$ болсо, анда “г” пунктуна өтөбүз, же болбосо

$N := N + 1$ жана кайрадан “б” пунктуна өтөбүз.

г) $t_+ := t_{1+};\ \ y_+ := y_{1+};\ \ N := -1$ деп алабыз.

е) ($t = T$ маанисин тапканга чейин кыймылды улантабыз). Эгерде $t_+ < T$ болсо, анда “б” пунктуна өтөбүз, же болбосо y_{1+} натыйжасы менен ЧЫГУУ. ($y(T, \varepsilon \leq y_{1+})$ деп далилденди).

Ушунун өзүндөй эле төмөнкү чегин табабыз.

Эгерде h_y жана h_t жетишээрлик кичине сандар болсо, анда алгоритм кадамдардын чектүү санында токтоору көрүнүп турат.

Анча татаал эмес теңдемелер үчүн бул алгоритмди колдо да эсептесе болот.

[$t_- \leq t_+,\ y_- \leq y \leq y_+$] болсо, $f(t, y) < 0$ болоорун далилдөө мүмкүн экендигине тиешелүү барабарсыздыктарды окурман в) пунктунан текшерет.

Бул алгоритм төмөндөгү мисалга колдонулган.

Мисал 7.3.1.

$$\varepsilon y'(t) = \left(y(t)\left(4 - t^2 - y^2(t)\right)\right) \ \ (0 \leq t \leq 3) \qquad (7.3.3.)$$

теңдемесин

$$1 \leq y(0) \leq 3 \qquad (7.3.4)$$

баштапкы шарты менен карайбыз.

Натыйжада төмөнкү теорема далилденген:

Теорема 7.3.3. (7.3.3) – (7.3.4) баштапкы маселенин чыгарылышы $-0,5 \leq y(3) \leq 0,5$ шартын канаттандырат.

2^0. Теңдемелер системасы болгон учур

Төмөнкү схема колдонулат.

$$F(y(t)y'(t),\varepsilon)=0\,,\ 0<\varepsilon<<1,\ \ y\in R^m \qquad (7.3.5)$$

кичи параметрдүү автономдуу теңдемелер системасы берилсин, мында F маанилери R^m де жаткан $(2m+1)$ өзгөрмөлүү үзгүлтүксүз функция (эгерде алгачкы система автономдуу болбосо, анда $y_{m+1}=t, y'=1$ кошумча өзгөрмөнү киргизүү менен аны автономдуууга алып келүүгө болот).

Лемма 7.3.2. Эгерде туюк көптүктөрдүн чектелген саны $H_0, H_1, \ldots, H_k\subset R^m$ жана $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$ оң сандары: $y(0,\varepsilon)\in H_{j-1}$, $\varepsilon<\varepsilon_j$ ден кандайдыр бир $t_j>0$ үчүн $y(t_j,\varepsilon)\in H_j$ келип чыккандай берилсе, анда жетишээрлик кичи $\varepsilon_0>0$ үчүн t_0 саны табылып $y(0,\varepsilon)\in H_0, \varepsilon<\varepsilon_0$ катнаштарынан $y(t_0,\varepsilon)\in H_k$ келип чыгат $(t_0=t_1+\ldots+\ldots+t_k, \varepsilon_0=min(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k))$ деп алса болот).

3^0. Биринчи тартиптеги теңдемелер системалары үчүн маселенин коюлушу жана чыгарылыштарынын касиеттери

(7.3.1) жана (7.3.2) маселесин карайлы, мында t_0, T – сандары, $Y_0\subset R^n$ – чектелген көптүк, $f(t,y): R\times R^n\to R^n$ – вектор функциясы, n – натуралдык саны берилген. $f(t,y)$-функциясы тууралуу болжолдоо ал бардык жерде эле аныктала бербеси мүмкүн, бирок $f(t,y)$ өзү аныкталган бардык чекиттерде үзгүлтүксүз болуп саналат.

ε жетишээрлик кичи болгондо маселенин $y(t,\varepsilon)$ чыгарылышы үчүн, ε дон көз карандысыз жетишээрлик тар чектерди (Y_0 дун туурасына шайкеш келген) табуу талап кылынат.

Лемма 7.3.3. Эгерде $Y = [y_{1-}, y_{1+}] \times \mathrm{K} \times [y_{n-}, y_{n+}] \subset R^n$ координаталык параллелепипеди жашаса жана

1) (7.3.1) – (7.3.2) маселесинин чыгарылышы $y(t_1, y_0) \in Y$ шартын канаттандырса;

2) f функциясы $D = [t_1, t_2] \times Y$ параллелепипединде аныкталса жана үзгүлтүксүз болсо;

3) t, y чекитинен $f(t, y)$ вектору, каалагандай $t \in [t_0, t_2]$ үчүн жана Y чегинин каалагандай y чекити үчүн D областынын ичине карай багытталган (б.а. $f_k(t, y_1, \mathrm{K}, y_{k-}, \mathrm{K}, y_n) > 0,\ f_k(t, y_1, \mathrm{K}, y_{k+}, \mathrm{K}, y_n) < 0$).

Анда (7.1.12) – (7.1.13) маселеси каалаган ε үчүн чыгарылышка ээ болот (жалгыз болбой калышы мүмкүн).

f функциясынын үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде чыгарылыштын локалдык жашашы (узартылышы) орун алат, ал эми **(7.3.3) лемманын** шартынын негизинде чыгарылыштын траекториясы D параллелепипединин каптал грандарын кесип өтө албайт.

Теорема 7.3.4. Эгерде

1. **7.3.3 лемманын** 1) жана 2) шарттары аткарылса;
2. ε жетишээрлик кичи болсо;
3. k нын кандайдыр номери үчүн, $t = t_2, y \in Y$ (D нын оң гранында) болгондо, $f_k(t, y_1, \mathrm{K}, y_k, \mathrm{K}, y_n) \neq 0$ шарты аткарылса, анда чыгарылыштын траекториясы кандайдыр бир $t < t_2$ де D нын каптал гранынын бирөөсүн кесип өтөт (бул жерде **7.3.3 леммасынын** 3) шарты аткарылбайт).

Далилдөө (карама каршылыкка келүү методу менен). Траектория D нын каптал жактарын кесип өтпөйт деп болжолдойлу. D да $y_i(t, \varepsilon), i = 1, \mathrm{K}, n$ менен чыгарылыштын компонентерин белгилейли. (7.3.1.) системасынын k (скалярдык) теңдемесин өзүнчө карайлы;

$$\varepsilon y_k'(t) = g(t, y_k(t), \varepsilon), t \in [t_1, t_2], y_k(t) \in Y_k, \tag{7.3.6}$$

мында $t = t_2, v \in Y_k$ болгондо

$$g(t, v, \varepsilon) = f_k(t, y_1(t, \varepsilon), \mathrm{K}, y_{k-1}(t, \varepsilon), v, y_{k+1}(t, \varepsilon), \mathrm{K}, y_n(t, \varepsilon)) \neq 0.$$

7.3.6 теңдемеси үчүн 7.3.4 теоремасынын бардык шарттары аткарылат [20], демек, анын чыгарылышынын траекториясы $[t_1, t_2] \times Y_k$] тик бурчтугунун оң жагын кесип өтпөйт, андай болушу мүмкүн да эмес. Теорема далилденди.

Кыстырма I. Скалярдык учурда "траектория, $f(t, y)$ функциясынын оң грандагы белгисине ылайык, каптал (жогорку же төмөнкү) грандарынын бирөөсүн кесип өтөт" жана "траектория, $f(t, y) \neq 0$ болгондо оң гранын кесип өтпөйт" ырастоолору эквиваленттүү, анткени $[t_1, t_2] \times Y_k$ тик бурчтугу $[t_1, t_2] \times R$ тилкесин эки бөлүккө бөлөт, ал эми жалпы (векордук) учур үчүн эквиваленттүү эмес.

Кыстырма II. Эки өлчөмдүү учурда **7.3.4 теоремасынын** 3) шартын төмөнкү, бошураак шартка алмаштырса болот: "оң гранында $f(t, y) \neq 0$", анткени бул учурда: эгерде "тоңдурулган" автономдуу теңдеме $\varepsilon y'(t) = f(t_3, y(t))$, мында t_3 саны t_2 ге жетишээрлик жакын болгондо чектелген чыгарылышка ээ болсо, анда ал дагы стационардык чекитке да ээ, б.а. оң гранында $f(t, y)$ нөлгө айланат.

Эми, качан (7.1.12) ге дал келген кулпурган $f(t, \omega) = 0$ теңдемесинин чекиттик чыгарылыштарынын көптүгү обочолонгон байланган тартуучу компонентке ээ болсо жана Y_0 анын тартуу областында жатса, (7.3.1)-(7.3.2) чыгарылышынын траекториясынын биригүүсүн кармаган параллелепипедди түзүүнүн алгоритмин жазалы (бул учур көбүнчө сингулярдык толкундануу теориясында колдонулат).

Мисал 7.3.2. Сингулярдуу - толкунданган кадимки дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын гарантияланган чектерин түзүү алгоритми.

Алгачкы берилген маалыматтар: аргументтин өзгөрүү интервалы (рационалдык) $[t_0, T]$; баштапкы маанилер үчүн интервалдык (рационалдык) вектор $Y_0 = [y_{01-}, y_{01+}] \times \mathrm{K} \times [y_{0n-}, y_{0n+}]$; $f(t, y)$ функциясынын $F([t_-, t_+], Y)$ интервалдык кеңейүүсүн эсептөөнүн алгоритми; (кичине рационалдуу) h_y сандары $-y$ боюнча кадам, h_t сандары $-t$ боюнча кадам (мында $n_t = (T - t_0)/h_t$ – бүтүн сан).

$t_k = t_0 + jh_t, k = 1, \ldots, k_t$ деп белгилейли. Жагы h_j болгон Y_0 – көптүгү гиперкубдардан турат деп эсептейбиз.

Каалагандай t үчүн T - көптүгү деп, чыгарылыштын траекторияларын гарантиялуу кесип өткөн R^nдеги көптүктү (гиперкубдардын биригүүсүн) айтабыз жана тиешелүү түрдө Y_0 – көптүгү деп чыгарылыштардын траекториялары кесип өтпөгөн көптүктү белгилейбиз.

Берилген далил боло алуучу эсептөөлөрдүн алгоритми **7.3.4** теоремасынын шарттарында аракет кылат жана **7.3.2** леммасына ылайык түзүлгөн.

Алгоритм. $t = t_0$ болгондо берилген Y_0 көптүгү T - көптүк болуп саналат.

T-көптүк түзүлгөн дейли, $Y_k - n$ - өлчөмдүү координаталык гиперкубдардын биригүүсү болсун. $D_k = Y_k \times [t_k, t_{k+1}]$ параллелепипеддеринин жыйындысын карайлы. Бул параллелепипеддердин, башка параллелепипеддердин грандары болбогон каптал грандарын "сырткы" деп, калгандарын "ички" деп атайлы. Бул гранды (7.3.2) леммасына ылайык параллелепипеддердин каптал гранындагы берилген ($F([t_-, t_+], Y)$ менен эсептелүүчү) $f(t, y)$ функциясынын компонентинин белгисине жараша "чыгуучу", "кирүүчү" же "анык эмес" деп атайбыз.

D_k жыйындысына, "чыгуучу" жана "анык эмес" грандарына жандаш болгон ушул түрдөгү бардык параллелепипеддерди кошобуз (бул учурда кандайдыр бир "сырткы" грандар "ички" болуп калышы мүмкүн) жана бул процессти "сырткы" грандарынын баары "кирүүчү" болуп калмайынча кайталайбыз (төмөнкү болжолдоолордун негизинде, бул түзүүлөр h_t жетишээрлик кичине жана эсептөөлөр жетишээрлик так болгондо кулпурган системанын чыгарылышынын тартуучу компонентасынын аймагында ишке ашкандыктан процесс токтойт). Андан кийин, **(7.3.4)** теоремасына ылайык бардык каптал грандары же "сырткы" же "чыгуучу" болгон Y – параллелепипеддерин аныктайбыз. Калган параллелепипеддердин биригүүсү (t – компонентсиз) T - Y_{k+l} көптүгүн берет.

Кыстырма III. (7.1.12)-(7.1.13) баштапкы маселенин чыгарылышы бардык $[t_0,T]$ аралыгында аныкталышы, бирок алгоритм бир канча кадамдан кийин Y – көптүгүн гана берип калган учуру кездешиши мүмкүн.

Мисал 7.3.3. *n=1* дейли

$$\varepsilon y'(t) = y(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

$$y(0) = 1 \in [0.9,1.1], \; h_t = 0.1, \; h_y = 0.2$$

тендемеси берилсин.

Анда, адегенде $D_0 = \{[0.0,0.1] \times [0.9,1.1]\}$, $[0.0,0.1] \times [0.9,0.9]$ - кирүү граны, $[0.0,0.1] \times [1.1,1.1]$ - чыгуу граны, $[0.1,0.1] \times [0.9,1.1]$ оң гранында *f(t,y)=y>0* экенине ээ болобуз. Кийинки кадамда $D_0 = \{[0.0,0.1] \times [0.9,1.1], [0.0,0.1] \times [1.1,1.3]\}$, экинчи тик бурчтуктун $[0.1,0.1] \times [1.1,1.3]$ оң гранында *f(t,y)>0*, ж.б.

Бул мисалда Y – тик бурчтуктарынын гана болушу төмөндөгүдөй түшүндүрүлөт. Каалаган ε үчүн траектория $t = 0.1$ түз сызыгын кесип өтөт, бирок ар бир y_+ саны үчүн траектория $t=0.1$, $y \le y_+$ шооласын $\varepsilon < \varepsilon_0$ болгондо кесип өтпөй турган ε_0 санын табууга мүмкүн.

§ 7.4. Сингулярдуу толкунданган системалардын траекторияларынын практикалык ажыратылыш кубулуштары

1 ^{0} Сингулярдык толкундануулар теориясынан кошумча маалыматтар жана траекториянын "практикалык бифуркация" кубулушунун аныктамасы

Аныктама 1. Эгерде каалагандай $t \in \Delta$ да

$$\lim\{x(t, x_0, \varepsilon) \mid \to 0\}$$

чектүү предели жашаса, анда (7.2.3) үчүн $x(t_0) = x_0$ Коши маселесин асимптоталык аныкталган деп атайбыз (чектик катмардын айлануу кубулушунда асимтотикалык аныксыздык табылган [19]). Эгерде бардык t_0 үчүн мындай пределдер жашаса, анда (7.2.3) тендемесин асимтотикалык аныкталган деп атайбыз.

$$\lim\{x(t_1, t_0, \varepsilon) \mid \varepsilon \to 0\},$$

шартын канаатандырган (t_0, x_0) дун көптүгүн (t_1, x_1) маанисинин тартылуу областы деп атайбыз.

Биз көз караш менен караганда [21] жумушуна чейин, баштапкы маанилердин мейкиндигиндеги ар түрдүү «ички» (t_1, x_1) маанилеринин тартылуу областтары бош кесилиштерге ээ болгонун же бирине бири кийиштирилген учурлар изилденгенин белгилей кетели. Ошону менен бирге бирине бири кийиштирилбеген, бирок тартылуу областарынын кесилиши бош эмес болуп калган тартылуу областтар да жашашы мүмкүн.

Мисал 7.4.1.

$$f(t,x) = \begin{cases} -t(t-1)(t-2)x(x-20)(x-40), & 0 \le t \le 3, \\ -(t-2)x(x-10)(x-20), & t > 3, \end{cases} \tag{7.4.1}$$

үзгүлтүксүз функция болгон

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in [0, \infty)$$

тендемесин

$$x(0) = x_0 \tag{7.4.2}$$

баштапкы шарты менен карайлы.

$t = 2$ болгондо, $x(2) = x(0) = x_0$ ду алабыз.

$x < 20$ болгондо $t \in [0,1]$ кесиндисинде $f_x(t,x) < 0$ го ээ болобуз, демек

$$\lim\{x(1, x_0, \varepsilon), |\varepsilon \to 0\} = 0, \ x_0 \in (-\infty, 20). \qquad (7.4.3)$$

$x = 20$ болгондо бардык $x, x(t,20,\varepsilon) = 20$ үчүн $f(t,x) = 0$ го ээ болобуз. Демек, $x_0 = 20$ тартылуу областынын $t = 1, x = 0$ маанилерине кирбейт.

Андан ары, бардык x_0 үчүн $x(2, x_0, \varepsilon) = x(0, x_0, \varepsilon) = x_0$ го ээ болобуз. $t > 0$ учурунда кулпурган теңдеме үч чыгарылышка ээ: $v_1(t) = 0, v_2(t) = 10, v_3 = 20$. $t = 2$ сызы-гында $v_1(t)$ үчүн тартылуу областы $x_0 \in (10, \infty)$, $v_1(t)$ үчүн - $x_0 \in (10, \infty)$ болуп саналат. Демек $t = 3, x = 20$ маанисинин тартылуу областты болуп $x_0 \in (10, \infty)$ саналат. Бул областты (7.4.3) областы менен салыштыруу изделген натыйжаны берет. Ошого карабастан (7.4.1) теңдемеси асимтотикалык аныкталган болуп саналарын белгилей кетели.

<u>Аныктама 2</u>. Эгерде

$$\lim\{\|X_1(\varepsilon) - X_2(\varepsilon)\| / \varepsilon \to 0\} = 0$$

шартын канааттандырган кандайдыр бир $X_1(\varepsilon)$ жана $X_2(\varepsilon)$ функциялары үчүн

$$(t \in [t_1, t_2])(\|x(t, x_1(\varepsilon), \varepsilon) - x(t, x_2(\varepsilon), \varepsilon)\| > h) \qquad (7.4.4)$$

катнашы аткарыла турган $[t_1, t_2] \subset \Delta$ кесиндиси жана $h > 0$ саны жашаса, анда $t = t_0$ до практикалык ажыратылыш кубулушу орун алат деп айтабыз [22].

(7.4.1) - (7.4.2) түрүндөгү баштапкы маселени чыгаруу үчүн жакындатылган методдун бирин аткарган кандайдыр бир компьютердик программаны карайлы. Абстракттуу түрдө айтканда, мындай программа машиналык сандардын көптүгүн (мисалы, [23] жумушун кара) өзүнө-өзү өзгөртүп түзөт (берилген $y(t_0)$ маанини жакындатылган $y(T)$ маанисине $P: M \to M$).

Аныктама 3. Эгерде төмөнкү шарттарды канааттан-дырган "жетишээрлик кең" $D \subset M$ кесиндиси жашаса:

- кандайдыр бир $y_- \in M$ үчүн, $P(y_-) < D_-$;
- кандайдыр бир $y_+ \in M$ үчүн, $P(y_+) > D_+$;

$P(y_0) \in D$ болгон, жок дегенде бирден көп эмес $y_0 \in M$ табылса, анда машиналык практикалык ажыратылыш кубулушу орун алат деп айтабыз.

2^0. Алгоритмдерди түзүү үчүн маселенин коюлушу жана теоремалар

$$\varepsilon y'(t) = f(t\ , y(t)),\ t_0 \le t \le T \tag{7.4.5}$$

теңдемени

$$y(t_0) = y_0 \tag{7.4.6}$$

баштапкы шарты менен карайлы, мында t_0, T, y_0 берилген сандар, $f(t, y)$-берилген функция.

Теорема 7.4.1. Эгерде:

$$\begin{aligned} &t_- \le t \le t_+, y_- \le y \le y_+ \text{ болсо, } df(t, y)/dy > 0; \\ &t = t_-\ \ y_- \le y \le y_+ \text{ болсо, } f(t, y) < 0 \\ &t = t_+\ \ y_- \le y \le y_+ \text{ болсо, } f(t, y) > 0 \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

шарттары аткарылса, анда практикалык ажыратылыш кубулушу орун алат: $\|X_1(\varepsilon) - X_2(\varepsilon)\| = 0(\varepsilon^{-c\ \varepsilon})$, $\quad \varepsilon > 0$.

Андан ары автономдук сингулярдуу толкунданган дифференциалдык теңдемелер системасын

$$\begin{cases} \varepsilon dx(t) = dt = f(x(t), y(t)), \\ dy(t)/dt = g(x(t), y(t)), \end{cases} \quad 0 \le t \le \infty \tag{7.4.8}$$

баштапкы

$$x(0) = x, y(0) = y_0 \tag{7.4.9}$$

шарты менен карайлы.

Бул маселенин, жетишээрлик кичи ε жана "дээрлик бардык" баштапкы маанилериндеги, $z(t, \varepsilon)$ чыгарылышы үчүн ε дон көз каранды эмес, жетишээрлик тар чектерди табуу талап кылынат.

Системанын чыгарылышын $z(t,\varepsilon)=\{x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon)\}$ деп белгилеп алалы. Ошондой эле $z(t,x_0,y_0,\varepsilon)$ белгилөөсүн да пайдаланабыз. $S(t)\subset R^2$ менен $z(t,\varepsilon)$ тин мүмкүн болгон маанилеринин көптүгүн, $z(t,x_0,y_0,\varepsilon)$ менен $\varepsilon\to 0$ болгондо пределдик чекиттеринин көптүгүн белгилейбиз.

$Z(t,x_0,y_0)=lim\{z(t,x_0,y_0,\varepsilon)/\ \varepsilon\to 0\}$ (чексиз алыстатылган чекиттерин кошо) пределдик функциясын аныктайбыз.

$Z(t,x_0,y_0)$ менен кулпурган маселенин чыгарылышы z_0 ар башка болгон чекиттердин аймагында чектик катмарларды алаарыбыз белгилүү.

Эгерде каралган аралыктарда $S(t)$ көптүгү үчүн өзгөчөлүк жайгашкан болсо, анда бифуркациялык кубулуш пайда болушу мүмкүн. Бул мааниде, (7.4.8) системасынын фазалык чекити $S(t)$нын кийинки участкаларына тез умтулат же болбосо чексизге кетет.

Төмөнкү болжолдоолордо алгоритм түзүлгөн:

1) системанын чыгарылышынын траекториясы бир эле убакытта $f=0$ жана $g=0$ болгон областтардан өтпөйт.

2) каалагандай $x_-<x_+$ үчүн $y_-<y_+$ табылат жана бул сандар үчүн

$$f>0\ \ (x\in[-\infty;x_0],y\in[y_{0-},y_{0+}]),$$
$$f<0\ \ (x\in[x_{0+};\infty],y\in[y_{0-},y_{0+}])$$

шарттары аткарылат.

$x_-\le x\le x_+,y_-\le y\le y_+$ интервалдык векторунда (тик бурчтугунда) практикалык бифуркациянын шарты $x{=}x_-,y_-\le y\le y_+$ төмөнкүдөй болот:

$$df(x,y)/\,dx>0,\ (7.4.10)$$
$$x=x_-,y_-\le y\le y_+\ \text{үчүн}\ f(x,y)<0,$$
$$\text{же}\ x=x_-,y_-\le y\le y_+\ \text{үчүн}\ f(x,y)>0.$$

[18]де көрсөтүлгөндөй J огуна перпендикулярдуу кесиндини $(J=1,2,\ldots)$ J - кесинди деп атайбыз.

Теорема 7.4.2. Эгерде (7.1.26) шарттары аткарылса, анда $z(t,x,y_1,\varepsilon)$ чыгарылышынын траекториясы $[x_-,x_+]\times[y_-,y_+]$ кесиндисин кесип өткөн $y_j\in[y_-,y_+]$ сандарынын так жогорку граны - $y_{0-}(\varepsilon)$ жана $z(t,x,y_1,\varepsilon)$ чыгарылышынын траекториясы $[x_-,x_+]\times[y_-,y_+]$ кесиндисин кесип өткөн $y_i\in[y_-,y_+]$ сандарынын так төмөнкү граны $y_{0+}(\varepsilon)$ табылышат.

Эгерде 7.4.1 же 7.4.2 теоремаларынын шарттары бир нече маанилер $t_{01}<t_{02}<\text{K}$ үчүн аткарылса, анда бул теоремалардан траекториялардын формасы жөнүндө түздөн-түз жыйынтык чыгарууга болбойт.

3^0. Практикалык ажыратылыш кубулушун экспременталдык изилдөө

Мисал 7.3.2. [30] да төмөнкү теңдеме каралган:
$$\varepsilon y'(t)=(y(t)-t)(2+t-y(t))(y(t)-(t-2)),(0\le 1<2)$$
7.4.1 теоремасынын шарттары
$$t_-=0,t_+=0,5;\,y_-=-1,y_+=1$$
$\left(y(2,0,\nu_-)\approx 0;\,y(2,0,\nu_+)\approx 4\right)$ үчүн аткарылат.

$\nu_-=-1,\nu_+=+1$ баштапкы маанилери тандап алынган. $y(2,0,\nu)$ нун маанилери ν нын ар түрдүү маанилери үчүн жана жок дегенде бир ν_0 саны үчүн $y(2,0,\nu_0)\in[1.3]$ шарты аткарылгандай максатта эсептелген.

Алгоритм: $\nu_d=(\nu_-+\nu_+)/2$ $\nu_d:=y(2,0,\nu_d)$ чондуктарын эсептейбиз. Эгерде $y_d<1$ болсо, анда $\nu_-:=\nu_d$ болот. Эгерде $y_m>3$ болсо, анда $\nu_+:=\nu_d$ болот. Эгерде $y_d\in[1,3]$ болсо, анда ν_0 ду аныктоо жөнүндө билдирүү берилет.

Машиналык практикалык ажыратылыш кубулушу Эйлердин сынык сызыктар методу боюнча PASCAL тилинде $y(0)$ дун, $[y(2)]\in[1,3]$ шартын канаатандырган маанилеринин жоктугу) эсептөөлөрүндө $\varepsilon<0,5$ үчүн орун алган.

Төмөнкү проблемаларды айта кетели:

Проблема 1. Эгерде (t_+, y_-) жана (t_+, y_+) чекиттерине жандашкан $[t_+, t_{2+}]\times[y_{2-}, y_-]$ жана $[t_+, t_{2+}]\times[y_+, y_{2+}]$тик бурчтуктары үчүн да **7.4.1 теоремасынын** шарттары аткарылса, анда практикалык ажыратылыш төрт багытта болушу мүмкүн. Бул багыттардын экиден көбүн эксперименталдык жол менен алууга болобу?

Проблема 2. 2 жана 3 аныктамаларды сингулярдык толкунданган теңдемелер системасына жалпылагыла.

VIII Глава. Социалдык-экономикалык илимдерден алынган мисалдар менен дифференциалдык теңдемелер

Биздин китепте дифференциалдык тендемелер боюнча буга чейинки традициялуу колдонмолор сыяктуу эле, мисалдар геометрия, механика, электротехника, гидравлика, оптика жана башка маанилүү прикладдык илимдерден келтирилген. Анткени окуу китептеринин көпчүлүгү негизинен техникалык жана табигыйилимий багыттагы адистерге арналчу.

Бул главада экономика, экология, аскер илими жана башка социалдык илимдердин өзгөчөлүгүнө арналган дифференциалдык теңдемелерди түзүүгө жана чыгарууга багытталган мисалдарды карайбыз.

§ 8.1. Экономика

Мисал 8.1.1. Фирманын, рыноктун теориясы.

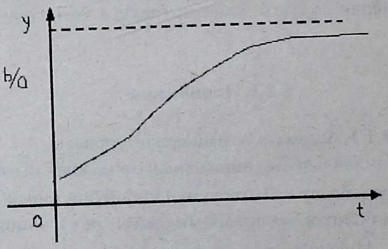
$y(t)$ – кандайдыр бир ишкананын продукция чыгаруусунун интенсивдүүлүгү болсун. Чыгаруунун көбөйүшү менен рыноктун толуусу пайда болот жана товардын баасы $p(y)$ төмөндөйт деп болжолдойлу. Мисалы, $p(y) = b - ay, (a, b > 0)$ болсун жана продукция чыгаруу интенсивдүүлүгүнүн көбөйүү ылдамдыгы кирешеден өсүүчү функция болуп саналсын.

$y(t)$ функциясы үчүн дифференциалдык теңдемени түзгүлө жана аны чыгарып, бул функциянын графигин тургузгула.

<u>Чыгаруу.</u> Туундунун механикалык маанисине ылайык $y' = \dfrac{dy}{dt}$ туундусу $y(t)$ функциясынын өзгөрүшүнүн ылдамдыгы болот. Шарт боюнча $\dfrac{dy}{dt} = k(b - ay)y$, мында $p(y)y$ көбөйтүндү - $y(t)$ чыгарууну $p(y)$ баа менен сатуудан киреше. Өзгөрмөлөрдү ажыратып, $\dfrac{dy}{y(b - ay)} = kdt$ теңдемесин алабыз,

муну интегралдап, $y = \dfrac{cbe^{bkt}}{1 + Cae^{bkt}}$ ны табабыз. Интегралдоонун натыйжасында алынган $y(t)$ функциясы социалдык илимдердин ар түрдүү бөлүмдөрүндө пайда болуучу логистикалык ийри сызык деп аталган теңдемени көрсөтөт (24-сүрөт.).

Берилген учурда логистикалык ийри сызык продукцияны чыгаруунун $y(t)$ маселенин шартына ылайык мүнөзүн чагылтат, атап айтканда, рыноктун убакыттын t өсүүсү менен товарга толуусу көрүнүп турат.



24-сүрөт.

Мисал 8.1.2. Активдин деңгээли боюнча бааларды текшилөөнүн экономикалык маселеси.

Активдин деңгээлинин q өзгөрүүсү s сунуш менен q суроонун ортосундагы айырмага $k(k > 0)$ пропорционалдык коэффициенти менен пропорциялаш болсун. Андан тышкары, p баанын өзгөрүүсү да q активдин кандайдыр бир фиксацияланган q_0 деңгээлинен четтөөсүнө $m(m > 0)$ пропорционалдык коэффициенти менен пропорциялаш болсун.

Жогоруда айтылган болжолдоолор учурунда бааларды q активдин деңгээли боюнча текшилөө маселесине туура келүүчү дифференциалдык теңдемелердин системасын жазгыла.

Чыгаруу. Маселенин шарттарын колдонуп теңдемелердин

$$\begin{cases} q' = k(s-d) \\ p' = -m(q-q_0) \end{cases}$$

системасын жазуу мүмкүн, мында өзгөрмөнүн жанындагы штрих убакыт боюнча туундуну билдирет.

s сунуш жана d суроонун экөө тең p баанын функциялары, б.а. $s(p), d(p)$ болуп саналаарын эске алып, натыйжада, төмөнкү дифференциалдык теңдемелердин системасына ээ болобуз:

$$\begin{cases} q' = k[s(p) - d(p)] \\ p' = m(q_0 - q). \end{cases}$$

Алынган дифференциалдык теңдемелердин системасы бааларды активдин деңгээли боюнча текшилөөнүн динамикалык моделин сүрөттөйт. Теңдемелердин системасы ага кирген суроо жана сунуш функцияларына жараша сызыктуу да, сызыктуу эмес да болушу мүмкүн.

Суроо жана сунуш функцияларынын баадан көз карандылык функциясынын эң жөнөкөй сызыктуу көз карандылык учурун карайбыз. Мындан кийин, эгерде талап кылынса, маселени татаалдаштыруу жана аталган функциялардын баадан башкача көз карандылыктарын кароо мүмкүн.

Ошентип, $s(p) = ap + s_0, d(p) = -cp + d_0, a > 0, c > 0$ болсун, анда дифференциалдык теңдемелердин системасы

$$\begin{cases} q' = k[(a+c)p + (s_0 - d_0)] \\ p' = m(q_0 - q). \end{cases}$$

түрүндө кайра жазылат.

Ыңгайлуурак белгилөөлөрдү жана туундуларды башкача жазууну кийирип, теңдемелер системасын жөнөкөйлөштүрөбүз. Төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dq}{dt} = A_{11}q + A_{12}p + A_{10}$$

$$\frac{dp}{dt} = A_{21}q + A_{22}p + A_{20.}$$

мында $A_{11} = 0,$

$$A_{12} = k(c+a),$$

$$A_{10} = k(s_0 - d_0)$$

$$A_{21} = -m$$

$$A_{22} = 0$$

$$A_{20} = mq_0.$$

Ошентип, биз турактуу коэффициенттүү экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин системасын алдык. A_{10}, A_{20} коэффициенттери нөлгө барабар эмес болгондуктан система бир тектүү эмес болуп саналат.

Бирок, изилденүүчү система стационардык чыгарылыштарга, туурараагы

$$\frac{dq}{dt} = k\left[(a+c)p + (s_0 - d_0)\right] = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = m(q_0 - q) = 0$$

теңдемелерден табылуучу, координаталары $p = p_0 = \dfrac{d_0 - s_0}{a+c}$, $q = q_0$ го барабар $q = q_0,\ p = p_0$ стационардык чекитке ээ болгондуктан, азыр эле алынган система бир тектүү дифференциалдык теңдемелердин системасы түрүнө келтирилүүсү мүмкүн. Бул үчүн теңдемелерди стационардык чекитке салыштырмалуу вариацияларда жазуу жетиштүү, ал табылган стационардык чыгарылыштардын (стационардык чекиттердин) туруктуулугун андан ары изилдөөгө зарыл болот. Өзгөрмөлөрдү $x_1 = q - q_0, x_2 = p - \dfrac{(d_0 - s_0)}{(a+c)}$ алмаштырууну аткарабыз, мунун натыйжасында бир тектүү эмес дифференциалдык теңдемелердин системасы

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

бир тектүү системасынын түрүн алат, мында

$$a_{11} = 0,$$
$$a_{12} = k(a+c),$$
$$a_{21} = -m,$$
$$a_{22} = 0.$$

Дифференциалдык теңдемелердин акыркы системасына дифференциалдык теңдемелер теориясынын, ошондой эле, табылган стационардык чыгарылыштардын туруктуулук теориясынын бүт кубаттуу аппараты оңой эле колдонулушу мүмкүн, анткени туруктуу стационардык чыгарылыштар же режимдер гана сакталат.

Мисал 8.1.3. Монополисттин динамикалык оптимизациясы.

Жоготууларынын $C = dQ^2 + \beta Q + \gamma, (\alpha, \beta, \gamma > 0)$ квадратикалык функциясына ээ бир тектүү продукцияны чыгаруучу фирма-монополист каралат.

Продукциянын запастары каралбагандыктан Q чыгаруу ар дайым суроого барабар деп белгиленет. Демек, биз $Q(t)$ символду эки чоңдукту тең белгилөө үчүн пайдаланабыз. Суроо $P(t)$ баадан гана эмес, баанын $P'(t)$ өзгөрүү ылдамдыгы: $Q = a - bP(t) + hP'(t), (a, b > 0; h \neq 0$ дөн да көз каранды деп болжолдонот.

Ошентип, фирманын пайдасы P жана P' эки өзгөрүлмөсүнөн көз каранды, б.а.

$$\pi(P, P') = PQ - C = P(a - bP + hP') -$$
$$- \alpha(a - bP + hP')^2 - \beta(a - bP + hP') - \gamma$$

Фирманын максаты болуп, $P(t)$ баанын жалпы пайданы убакыттын $[0, T]$ чектүү аралыгында максималдаштыруучу оптималдык траекториясын табуу саналат. Бул аралык суроо жана жоготуулардын фиксацияланган функциялары жөнүндө болжолдоону жана, ошондой эле дисконттоо көбөйтүүчүсүнүн жоктугун актай тургандай жетишерлик кыска болуусу болжолдонот.

Фирма-монополисттин милдети, ошентип,

$$max\,\pi = max\int_0^t \pi(P,P')dt \quad (P(0)=P_0, P(T)=P_T)$$ түрүндө жазылуусу мүмкүн.

Чыгаруу. Максимумдун $\frac{d\pi}{dt}=0$ зарыл шарты Эйлердин теңдемеси деп аталган $\frac{\partial\pi}{\partial p}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial\pi}{\partial P'})=0$ түрүндө жазылуусу мүмкүн, мында

$$\pi(P,P')-b(1+ab)P^2+(a+2\alpha a+\beta b)P-\alpha h^2P'^2-$$
$$-h(2\alpha a+\beta)P'+h(1+2\alpha\beta)PP'-(\alpha a^2+\beta a+\gamma).$$

Айрым туундуларды табабыз:

$$\frac{\partial\pi}{\partial P}=-2b(1+\alpha\beta)P+(a+2\alpha ab+\beta b)+h(1+2\alpha b)P',$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial P'}=-2\alpha h^2P'-h(2\alpha a+\beta)+h(1+2\alpha b)P',$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\pi}{\partial P'})=\pi_{P't}+\pi_{P'P}P'(t)+\pi_{P'P'}P''(t),$$

мында $\pi_{P't}=0,$

$\pi_{P'P}=h(1+2\alpha b),$

$\pi_{P'P'}=-2\alpha h^2.$

Окшош мүчөлөрдү келтиргенден кийин Эйлердин теңдемеси: $P''-\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}P=-\frac{a+2\alpha ab+\beta b}{2\alpha}$ түрүн алат, б.а. оптимизация маселеси турактуу коэффициенттүү экинчи тартиптеги бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдемени чыгарууга келтирилди. Бул теңдеменин жалпы чыгарылышы каалагандай турактуулардын вариациясы методу аркылуу табылуусу мүмкүн жана $P(t)=c_1e^{rt}+c_2e^{-rt}+\overline{P}$ түрүнө ээ болот, мында

$$\overline{P}=\frac{a+2\alpha ab+\beta b}{2b(1+\alpha b)}, r=\sqrt{\frac{b(1+2b)}{\alpha h^2}},$$

$$c_1 = \frac{P_0 - \overline{P} - (P_T - \overline{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}}, \quad c_2 = \frac{P_0 - \overline{P} - (P_T - \overline{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}.$$

Ошентип, $P^*(t)$ баанын оптималдык траекториясы жетишерлик татаал түргө ээ жана кошумча изилдөөнү талап кылат.

§8.2. Экология.

Экологияда изилдөөлөрдүн негизги методу болуп популяциянын динамикасы же эволюциясы саналат. Бир нече типтүү мисалдарды карайбыз.

Мисал 8.2.1. Популяциянын эволюциясы.

Популяциянын эволюциясын төмөнкү болжолдоолордо баяндап жазуучу дифференциалдык теңдемени түзгүлө: A – популяциядагы убакыттын бирдигинде төрөлүүчү индивиддердин саны, ал эми B – убакыттын бирдигинде каза болуучу индивиддердин саны. Чыгаргыла жана алынган чыгарылышты талдагыла.

Чыгаруу. $x(t)$ аркылуу популяциядагы убакыттын каалагандай t моментиндеги индивиддердин санын белгилейбиз. Популяциядагы индивиддердин өзгөрүүсүнүн ылдамдыгы

$$\frac{dx}{dt} = A - B \tag{8.2.1}$$

формула менен берилерин жетишерлик негиз менен ырастоо мүмкүн.

1-учур. Индивиддердин төрөлүү жана каза болуу ылдамдыктары үчүн сызыктуу көз карандылык.

Эң жөнөкөй учур болуп $A = ax,\ B = bx$ болгон жагдай саналат. Бул учурда (8.2.1) теңдеме өзгөрүлмөлөрү ажыралуучу $\frac{dx}{dt} = (a-b)x$ дифференциалдык теңдеме түрүндө кайра жазылат.

Өзгөрүлмөлөрдү ажыратып, $\frac{dx}{x} = (a-b)dt$ ны табабыз жана интегралдап, төмөнкүнү алабыз:

$$\int \frac{dx}{x} = (a-b)\int dt \to \ln|x| = (a-b)t + \ln|c| \to \ln\left|\frac{x}{c}\right| =$$

$$= (a-b)t \to x = ce^{(a-b)t}.$$

Алынган туюнтманы эң жөнөкөй талдоо, эгерде $a > b$ болсо, анда $t \to \infty$ болгондо, индивиддердин саны $x \to \infty$ болорун көрсөтөт. $a < b$ болсо, $t \to \infty$ болгондо, $x \to 0$ жана популяция жоголуучу болот.

2-учур. Индивиддердин санынын өзгөрүү ылдамдыктары үчүн сызыктуу эмес көз карандылык.

Популяциялардын эволюциясын баяндап жазуу үчүн реалдуурак учурлар болуп, балким, индивиддердин санынын өзгөрүү ылдамдыгы сызыктуу эмес функция болуп саналарын болжолдогон моделдер саналат. Мындай учурда популяциядагы индивиддердин санынын кошулуу ылдамдыгы төмөндөгү түрдөгү дифференциалдык теңдеме менен берилет:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{8.2.2}$$

мында $f(x)$ - кандайдыр бир сызыктуу эмес функция.

Маселен, $f(x) = ax - bx^2$ болсун, мында $a > 0,\ b > 0$. Бул учурда (8.2.2) ни Бернуллинин дифференциалдык теңдемеси деп аталган

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \tag{8.2.3}$$

теңдемеге өзгөртүп түзөбүз (мындай теңдеменин жалпы түрүн §2.4 төн караңыз).

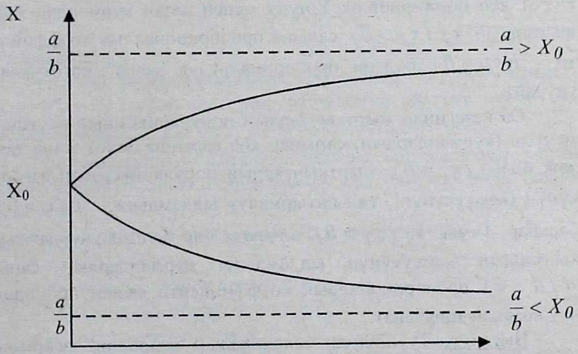
Биологияда бул теңдеме Ферхюльст-Перлдин теңдемеси деп аталат. Теңдемеде популяциянын «өзүн өзү уулоо эффекти» деп аталган нерсе же башка сөз менен айтканда, түрдүн ички күрөшү эске алынат.

Популяциянын өсүшүн төмөндөтүүчү себептер болуп тамак үчүн, орун үчүн, инфекцияны таратуу, кысылгандык айынан ж.б. конкуренттик күрөш саналуусу мүмкүн. (8.2.3) теңдемени интегралдап, төмөнкүнү табабыз:

$$x(t)=\frac{\frac{a}{b}\cdot x_0}{x_0+\left(\frac{a}{b}-x_0\right)e^{-a(t-t_0)}}, \qquad (8.2.4)$$

мында $x_0 = x(t_0)$.

(8.2.4) туюнтмадан $t\to\infty$ болгондо популяциядагы индивиддердин саны өзүнүн $\frac{a}{b}$ пределине, б.а. $x(t)\to\frac{a}{b}$ га ээ болору көрүнүп турат. Ушуну менен бирге $\frac{a}{b}>x_0$ жана $\frac{a}{b}<x_0$ эки учурду кароо керек болот. Алардын арасындагы айырма 25-сүрөттөн жакшы көрүнүп турат.



25-сүрөт

Каралган модель популяциянын динамикасын чектелген чөйрөдө сүрөттөйт. (7.2.3) теңдеме социалдык экономикалык процесстерди моделдөөдө да, маселен, рекламаны жайылтууда пайдаланылат.

Мисал 8.2.2. Популяциялардын динамикасы. Вольтер-Лотктын «жырткыч-курмандык» модели.

Вольтер-Лотктун «жырткыч-курмандык» моделин баяндап жазуучу дифференциалдык теңдемелер системасын алуу.

Популяциялардын динамикасында көбүнчө жырткычтардын жана алардын табылгаларынын (курмандыктарынын) ар түрдүү, жетишерлик жалпы болжолдоолор учурундагы өз ара аракеттешүүлөрү изилденет.

Ошону менен катар, биз жырткычтардын жана алардын курмандыктарынын өз ара аракеттешүүлөрүнүн бир түрдөгү индивиддердин (жырткычтардын) арасында эрегишүүлүк жок деп болжолдонгондогу моделин карайбыз. x_1, x_2 - тиешелүү түрдө курмандардын жана жырткычтардын саны болсун дейли.

Жырткычтар жок кезде $(x_2 = 0)$ курмандардын салыштырмалуу өсүүсү туруктуу ылдамдык, маселен, $a\ (a > 0)$ менен жүрөт деп болжолдойлу. Ушуну менен катар курмандар жырткычтардын $x_2\ (x_2 > 0)$ санына пропорционалдык коэффициенти - $b\ (b > 0)$ болгон пропорциялуулук менен жоготууларга учурайт.

Өз кезегинде жырткычтардын популяциясынын өсүүсү тамактын (курмандардын) санынан көз каранды болот жана тамак жок болсо $(x_1 = 0)$, жырткычтардын популяциясынын өзгөрүүсүнүн (кемүүсүнүн!) салыштырмалуу ылдамдыгы - $c\ (c > 0)$ га барабар. Тамак $x_1\ (x_1 > 0)$ өлчөмдө бар болгон учурда жырткычтардын кемүүсүнүн ылдамдыгы курмандардын санына $d\ (d > 0)$ пропорционалдык коэффициенти менен пропорциялуу компенсацияланат.

<u>Чыгаруу.</u> Туундунун механикалык маанисин өзгөрмөнүн өзгөрүү ылдамдыгы катары гана жана маселенин шарттарын пайдаланып, курмандардын (өсүүсүнүн) салыштырмалуу x_1 ылдамдыгы үчүн жырткычтар жок болгон учурда $\frac{x_1'}{x_1} = a$ га жана алар катышкан учурда $\frac{x_1'}{x_1} = a - bx_2$ ге ээ болобуз. Ушуга окшош эле

жырткычтар үчүн алардын өсүүсүнүн чынына келгенде кемүүсүнүн салыштырмалуу ылдамдыгы үчүн тамак жок болгондо $\dfrac{x'_2}{x_2} = -c$ га жана компенсация бар болгондо $\dfrac{x'_2}{x_2} = -c + dx_1$ ге ээ болобуз. Өзгөрмөгө коюлган штрих анын убакыт боюнча биринчи туундусун көрсөтөөрүн белгилей кетели. Эки барабардыкты бириктирип, эки белгисиздүү сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин, б.а. Вольтерр-Лотк моделине туура келген экинчи тартиптеги

$$\begin{cases} x'_1 = (a - bx_2)x_1, \\ x'_2 = (-c + dx_1)x_2 \end{cases} \tag{8.2.5}$$

системасына ээ болобуз.

Кошинин стандарттуу формасында жазып,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 - bx_1x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -cx_2 + dx_1x_2 \end{cases} \tag{8.2.6}$$

системасына ээ болобуз.

Алынган дифференциалдык теңдемелер системасынын сызыктуу бөлүгү мурда келтирип чыгарылган система менен дал келет, бирок эми $a_{11} = a,\ a_{12} = 0,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -c$.

Теңдемелердин алынган системасы көп сандаган башка колдонууларга ээ, анын ичинде төмөнкүлөр бар экендигин белгилей кетели:

- эрегишүүчү фирмалардын өзүн алып жүрүүсү,
- калктын өсүүсү,
- согушуучу армиялардын саны,
- экологиялык абалдын өзгөрүүсү,
- илимдин өнүгүүсү ж.б.

Мисал 8.2.3. Вольтерра-Лотк моделинин сапаттык анализи. Теңдемелердин алынган системасына кайрылалы.

Вольтерра-Лотктун тургузган модели алынуучу чыгарылыштардын кызыктуу сапаттык анализин өткөрүүгө мүмкүндүк берет. Чындыгында, $x_1 = x,\ x_2 = y$ деп белгилесек, анда мурда алынган дифференциалдык теңдемелердин системасы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = cy - dxy \end{cases} \qquad (8.2.7)$$

түрүн алат, мында $a, b, c, d > 0$. (8.2.7) системасынын чыгарылыштарын сапаттык изилдөөнү ыңгайлаштыруу үчүн $u(\tau) = \dfrac{d}{c}x$, $v(\tau) = \dfrac{b}{a}y$, $\tau = ct$, $\alpha = \dfrac{a}{c}$ өлчөмсүз өзгөрмөлөрүн кийиребиз, анда (8.2.7) системасы

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha u(v-1), \quad \frac{dv}{d\tau} = v(1-u) \qquad (8.2.8)$$

түрүн алат.

Биринчи теңдемени экинчисине бөлөбүз:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\alpha u(v-1)}{v(1-u)} \Rightarrow \frac{1-u}{u}du = \alpha\frac{v-1}{v}dv \Rightarrow \ln u - u = \alpha v - \alpha \ln v + c.$$

Убакыттын кандайдыр бир $\tau = \tau_0$ моментинде эки түрдүн тең индивиддеринин саны (баштапкы шарттары) белгилүү болсун деп болжолдойлу, б.а.

$$u(\tau_0) = u_0, \; v(\tau_0) = v_0$$

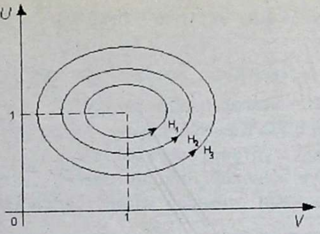
болсун дейли. Анда

$c = \ln u_0 - u_0 - \alpha v_0 + \alpha \ln v_0 = \ln u_0 v_0^{\alpha} - u_0 - \alpha v_0$. Натыйжада төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\alpha v + u - \ln u \cdot v^{\alpha} = H, \qquad (8.2.9)$$

мында $H = \alpha v_0 + u_0 - \ln u_0 \cdot v_0^{\alpha} = const$.

(8.2.9) ийри сызыктарынын H тын ар түрдүү маанилериндеги түрү 26-сүрөттө көрсөтүлгөн.



26-сүрөт.

Мында $u(\tau)$ өзгөрмөсү да, ошондой эле, $v(\tau)$ өзгөрмөсү да туюк траекторияны «басып өтөрү» көрүнүп турат. Бул болсо, чыгарылыштар убакыт боюнча мезгилдүү функциялар болушат дегенди билдирет.

§8.3. Демография

Мисал 8.3.1. Калктын санынын өзгөрүү закону.

Статистикалык маалыматтардан каралып жаткан региондор үчүн убакыттын бирдигиндеги жаңы төрөлгөндөрдүн саны менен каза болгондордун саны пропорционалдык коэффициенттери тиешелүү түрдө k_1, k_2 болгон калктын санына пропорциялаш.

Чыгаруу. $y(t)$ - убакыттын t моментиндеги региондордун тургундарынын саны болсун. Калктын Δt убакыт ичиндеги Δt өсүшү төмөнкүгө барабар: $\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = ky$, мында $k = k_1 - k_2$. $\Delta t \to 0$ болгондогу пределге өтүп, $\dfrac{dy}{dt} = ky$ ти алабыз. Өзгөрмөлөрдү ажыратып эң жөнөкөй $\dfrac{dy}{y} = kdt$ дифференциалдык теңдемеге ээ болобуз. Интегралдап төмөнкүнү алабыз:

$$\int\frac{dy}{y}=k\int dt,\ \ln|y|=kt+\ln|c|,\ \ln\left|\frac{y}{c}\right|=kt,\ \left|\frac{y}{c}\right|=e^{kt},$$

$$|y|=|c|e^{kt},\ y=\pm ce^{kt},\ y=ce^{kt},$$

мында $c=\pm c$ - каалагандай турактуу.

Мисал 8.3.2. Калктын өсүшү.

1-учур. Үзгүлтүксүз өсүү же кемүү.

Өсүүнүн жөнөкөй тибинин математикалык моделин тургузуу үчүн калктын санынын өзгөрүүсүнүн ылдамдыгы калктын санына пропорционалдуу: $\frac{dN}{dt}=kN$ деп кабыл алабыз, мында $N=N(t)$ - t моментиндеги калктын саны, k – пропорционалдык коэффициенти.

Чыгаруу. Өзгөрмөлөрдү ажыратып, $\frac{dN}{N}=kdt$ ны алабыз. Мындан $N(t)=ce^{kt}=N_0e^{kt}$, мында $N_0=N(0)=c$. Эгерде $k>0$ болсо, анда алынган көз карандылык өсүү законун аныктайт. Эгерде $k<0$ болсо, анда кемүү процесси орун алат.

2-учур. Үзгүлтүксүз өсүү.

Калктын саны N жасалма азаюучу ылдамдык менен өзгөрөт деп болжолдойлу. Калктын N өсүүсүнө тоскоолдук кылуучу жагдайлар анын $M(M<N)$ санын шарттайт деп эсептейбиз. Мындан сырткары, N санынын өсүүсүнүн ылдамдыгы N дин жана M-N айрымасынын көбөйтүндүсүнө пропорционалдуу деп болжолдойбуз. Эгерде M-N өсүү аз болсо, анда калктын өсүүсүнүн ылдамдыгы, албетте акырындайт.

Чыгаруу. Болжолдоо боюнча $\frac{dN}{dt}=kN(M-N)$ орун алат. Бул өзгөрмөлөрү ажыратылуучу дифференциалдык теңдемелер. Өзгөрмөлөрдү ажыратып, $\frac{dN}{N(M-N)}=kdt$ теңдемени алабыз. Өзгөрмөлөрдү ажыратуу аркылуу $\frac{dN}{N(M-N)}=kdt$ теңдемесин алабыз. Түздөн-түз интегралдоо жакшы белгилүү

$$N(t) = \frac{MN_0}{N_0 + (M - N_0)e^{-Mkt}}$$

функцияны берет, мында $N_0 = N(0)$. Ийри сызыктын өзгөрүү мүнөзү 24-сүрөттө берилген. $\frac{b}{a}$ пределдик маанини M ге алмаштыруу гана зарыл. Ошентип, калктын өсүүсүнүн жасалмалуу кемүүчү ылдамдыгы учурунда, б.а. калктын өсүүсүнө тоскоолдук кылуучу жагдайлар бар болгон учурда (Кытайдагы төрөөнү чектөө), калктын саны кандайдыр бир фиксацияланган мааниге умтулат.

§ 8.4. Аскердик жана социалдык илимдер

Мисал 8.4.1. Аскердик илимдер. Курал – жарактарды көбөйтүү жөнүндө маселе.

Эки коңшу өлкө, аныктык үчүн аларды X жана Y менен белгилейли, болуп калуучу кандайдыр бир конфликтик жагдайды карайлы $x = x(t)$ – X өлкөсүнүн t моменттеги куралданууга чыгымдары, ал эми $y = y(t)$ – Y өлкөсүнүн ошол эле t моменттеги чыгымдары болсун.

Төмөнкү эки болжолдоону эске алуу менен курал – жарактарды көбөйтүү моделин тургузалы:

1) X өлкөсү Y өлкөсү тарабынан согуштун потенциалдык коркунучунан чочулап куралданууда, ал болсо, өз кезегинде, X өлкөсүнүн куралданууга чыгымдарынын өсүүсү жөнүндө билип, куралданууга өз чыгымдарын көбөйтүүдө. Ушуну менен бирге, ар бир өлкө куралдануунун өсүү ылдамдыгын экинчи өлкөнүн чыгымдарынын деңгээлине пропорциялаш $\alpha, \beta (\alpha > 0, \beta > 0)$ пропорционалдык коэффциенттери менен тиешелүү түрдө өзгөртөт.

2) ар бир өлкөнүн коргонууга чыгымдарынын учурдагы деңгээли канчалык көп болсо, анын өсүү ылдамдыгы (пропорционалдык коэффициенттери тиешелүү түрдө $\gamma, \delta (\gamma > 0, \delta > 0)$) ошончолук аз.

<u>Чыгаруу</u>. Туундунун механикалык маанисин гана өзгөрүшүн ылдамдыгы же өзгөрмө чоңдуктун өсүүсү катары пайдала-

нып, ушул эле жерден, маселенин шарттарынан жана эки болжолдоодон пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \gamma x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta x - \delta y.$$

Ошентип, кайрадан Кошинин стандарттык формасындагы *(n=2)* дифференциалдык теңдемелеринин бир тектүү системаларын алдык.

Мисал 8.4.2. Реклама – «Сооданын кыймылдаткычы».

Кандайдыр бир фирма N потенциалдык сатып алуучулардан t моментте x гана сатып алуучу билген продукцияны сатсын дейли. Продукцияны сатууну ылдамдатуу үчүн радио жана телекөрсөтүү боюнча рекламалык кулактандыруулар берилсин деп болжолдойлу.

Продукция жөнүндө кийинки маалымат сатып алуучулар арасында алардын бири – бири менен мамилеси аркылуу таралат деп эсептейбиз.

Убакыт товар жөнүндө $\frac{N}{g}(g>1)$ б.а. $x(0) = N/g$ киши билген рекламалык кулактандыруулар чыккан моменттен баштап эсептелген шартта продукциянын сатылышы тууралуу билген сатып алуучулардын саны үчүн дифференциалдык теңдемелерди түзгүлө.

Чыгаруу. Туундунун механикалык маанисине ылайык, фирманын продукциясы тууралуу билген сатып алуучулардын $x(t)$ санынын өзгөрүү ылдамдыгы $\frac{dx}{dt}$ га барабар. Маселенин шарты боюнча $\frac{dx}{dt} = kx(N-x) \to \frac{ds}{x(N-x)} = kdt$ дифференциалдык теңдемесин түзөбүз, мында k – пропорционалдык коэффициенти. Алынган теңдеме өзгөрмөлөрү ажыратылуучу дифференциалдык теңдеме болот. Анын сол жана оң жактарын интегралдап, түздөн-түз $\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + c$ ны табабыз, мында $x = \frac{N}{1+\alpha e^{-Nkt}}$.

Алынган функция кайрадан эле $\alpha = \frac{1}{A}, A = e^{c_1}, c_1 = NC, C$ – каалагандай туруктуу сан, болгон логистикалык ийри сызыктын теңдемесин берет. Эгерде убакытты санап бөлүү жөнүндөгү атап өтүлгөн (дифференциалдык теңдемелер теориясында баштапкы шарттар деп аталган) кошумча шартты пайдалансак, анда каалагандай C туруктуу $C = \frac{1}{N} ln \frac{g}{g-1}$ ге барабар экенин табууга болот.

Ошентип, товар жөнүндө билгендердин саны чексизге чейин өсө албайт, рекламанын санын канчалык көтөрбөгүнүн, бул сан кандайдыр бир каныккандык пределинен өйдө көтөрүлө албайт.

Мисал 8.4.3. Маалымат теориясы. Гартмандын модели.

Бул моделге ылайык $I(t)$ маалыматтын өзгөрүү ылдамдыгын өнүгүү процесинде $\frac{dI}{dt} = ALI$ теңдемеси менен аныкталат, мында $A>0$, ал эми L болсо, билимдин кандайдыр бир тармагында иштеген $L = L_0 e^{a_0 t}$, $a_0 > 0$ формуласы менен аныкталуучу окумуштуулардын саны.

Чыгаруу. Өзгөрмөлөрдү ажыратып,

$\frac{dI}{I} = AL_0 e^{a_0 t} dt$, $\int \frac{dI}{I} = AL_0 \int e^{a_0 t} dt$ ны табабыз жана түздөн – түз интегралдоо $\ln I = \frac{AL_0}{a_0} e^{a_0 t} + \ln C \Rightarrow I = Ce^{\frac{AL_0}{a_0} e^{a_0 t}}$ ны берет.

Ошентип, убакыттын өтүүсү менен $I(t)$ функциясынын маалыматтын өзгөрүүсүн аныктоочу «эки эселенген» экспоненциалдык өсүүсү орун алат.

§ 8.5. Социалдык – экономикалык илимдер

Мисал 8.5.1. Рыноктук баанын динамикасы.

p баа менен канааттандырылбаган суроонун ортосундагы байланыш моделдештирилет: $d(p) - s(p)$, мында $d(p) = a - bp$, $s(p) = \alpha + \beta p$ тиешелүү түрдө $p(a, b, \alpha, \beta > 0)$ баа учурундагы суроо жана сунуш.

Самуэльсондун моделине ылайык баанын өзгөртүү ылдамдыгы пропорционалдык коэффициенти $k>0$ болгон канааттандырылбаган суроого пропорциялаш, б.а.

$$\frac{dp}{dt} = k(d(p) - s(p)). \tag{8.5.1}$$

Берилген теңдеме суроо жана сунуш функцияларынын ачык түрүн эске алуу менен

$$\frac{dp}{dt} + k(b+\beta)p = k(a-\alpha) \tag{8.5.2}$$

түрүн алат.

Чыгаруу. Алынган теңдеме сызыктуу дифференциалдык теңдеме болуп саналат (§ 2.4 тү кара). Анын жалпы чыгарылышын $p(t) = p_0 + p_r$ суммасы түрүндө издейбиз, мында p_0 – тиешелүү бир тектүү $\frac{dp}{dt} + k(b+\beta)p = 0$ теңдемесинин жалпы чыгарылышы. Акыркы теңдеме үчүн өзгөрмөлөрдү ажыратып $\frac{dp}{p} = -k(b+\beta)dt \Rightarrow p_0 = Ce^{-k(b+\beta)t}$ ны алабыз. (8.5.2) теңдемесинин $p_r = \overline{p} = const$ тең салмактуулук чыгарылыштын пайдалануу мүмкүндүгүн оңой эле «ойлоп табуу» мүмкүн, мында $\overline{p}$ турактуусу $d(p) = s(p)$ теңдемесинин тамыры, б. а. $p = \overline{p}$ баанын (8.5.1) теңдемесинин оң жагын нөлгө айландыра турган мааниси. $\overline{p}$ ны (8.5.2) теңдемеге коюп, $\overline{p} = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$ ны табабыз.

Ошентип, (8.5.2) теңдемесинин жалпы чыгарылышы $p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + Ce^{-k(b-\beta)t}$ түрүн алат. $b+\beta > 0,\ k > 0$ болгондо убакыттын өсүүсү менен (б. а. $t \to +\infty$ болгондо) $p(t)$ функциясы өзүнүн $p(t) = \overline{p} = \frac{a-\alpha}{b+\beta}$ стационардык маанисине умтулары көрүнүп турат.

Мисал 8.5.2. Фонддордун кыймылы.

K – фонддордун натуралдык же нарктык туюнтулушундагы чоңдугу, μ – фонддордун керектен чыгуусунун коэффициенти болсун дейли. Керектен чыгуу фонддордун жыл ичинде μK чоңдукка азаюсуна алып келет. Эгерде фонддордун керектен чыгуусу бир калыпта болот деп эсептесек, анда Δt убакыттын ичинде фонддор $\mu K \Delta t$ га азаят. Башка жагынан, инвестициялар фонддордун көбөйүүсүнө алып келет. i өлчөмдөгү инвестициялар бир жыл ичинде фонддордун ρi чоңдукка көбөйүүсүн берет деп болжолдойлу, мында ρ, i – турактуулар. Анда Δt убакыттын ичинде инвестициялар бир калыпта салынганда фонддордун $\rho I \Delta t$ чоңдукка көбөйүүсүн беришет.

Атап өтүлгөн болжолдоолорду эсепке алып,

$K(t+\Delta t) = K(t) - \mu K \Delta t + \rho I \Delta t \Rightarrow K(t+\Delta t) - K(t) + \mu K \Delta t = \rho I \Delta t$

га ээ болобуз.

Сол жана оң жактарын Δt га бөлүп,

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} + \mu K = \rho I \tag{8.5.3}$$

ни алабыз.

$\Delta t \to 0$ болгондогу пределге өтүп, $\frac{\Delta K}{\Delta t} + \mu K = \rho I$ ни алабыз.

<u>Чыгаруу.</u> Алынган сызыктуу теңдеменин чыгарылышын $K(t) = K_0 + K_r$ түрүндө издейбиз, мында K_0 – бир тектүү $\frac{\Delta K}{\Delta t} + \mu K = 0$ теңдеменин жалпы чыгарылышы, ал эми K_r – бир обьектүү эмес теңдеменин кандайдыр бир айрым чыгарылышы.

Өзгөрмөлөрдү ажыратып жана интегралдап,

$\frac{\Delta K}{K} = -\mu dt \Rightarrow \ln K = \mu t + \ln C$ ны алабыз, мындан $K_0 = Ce^{-\mu t}$.

Мурда келтирилген эскертүүлөрдү эске алып, айрым чыгарылышты $K_r = \overline{K} = const$ түрүндө тандап алабыз. (8.5.3) теңдемесине койгондон кийин $\mu \overline{K} = \rho I \Rightarrow \overline{K} = \frac{\rho I}{\mu}$ ну алабыз.

Ошентип, фонддордун изделген чондугу $K(t) = \overline{K} + K_0 = \dfrac{\rho I}{\mu} + Ce^{-\mu t}$ менен туюнтулат.

Мисал 8.5.3. Баалары прогноздолуучу рыноктун модели.

Эгерде *d(t)* суроонун жана *s(t)* сунуштун прогнозу $dt = 3p'' - p' - 2p + 18,\ s(t) = 4p'' + p' + 3p + 3$ катнаштар менен сүрөттөлсө, анда товардын *p* баасынын динамикасын издегиле.

Чыгаруу. Рыноктун тең салмактуу абалы $d(p) = s(p)$ барабардык менен мүнөздөлөт. Эгерде бул барабарсыздыкты эсепке алсак, анда жөнөкөйлөштүр-гөндөн кийин $p'' + 2p' + 5p = 15$ ти алабыз. Экинчи тартиптеги турактуу коэффициентүү берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышы $p(t) = p_0 + p_r$ түзүлүшүнө ээ болот, мында p_0 – бир тектүү $p'' + 2p' + 5p = 0$ теңдеменин жалпы чыгарылышы. $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$ комплекстик тамырларга ээ болгон $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ мүнөздөгүч теңдемени түзөбүз. Демек, $p_0 = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$, мында c_1 жана c_2 – каалагандай турактуулар.

Оң жагы *f(t)=15* болгондуктан, аны (8.5.3)түн атайын оң жагы менен салыштыруудан $\alpha = 0,\ \beta = 0$ келип чыгат, б. а. $\lambda = \alpha \pm \beta i = 0$ мүнөздөгүч теңдеменин *(r=0)* тамыры болуп саналат. Ошондуктан p_r айрым чыгарылышты нөлүнчү даражалуу $p_r = \overline{p} = const$ көп мүчөсү түрүндө издейбиз. $\overline{p}$ ны алгачкы теңдемеге койгондон кийин $\overline{p} = 3$ тү алабыз.

Ошентип, баанын өзгөрүү мүнөзүн туюнткан изделген чыгарылыш $p(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + 3$ түрүнө ээ болот.

$t \to \infty$ болгондо $p(t) \to 3$ болгондуктан, алынган чыгарылыш туруктуулукка ээ болорун белгилеп кетүү керек. Бул *p(t)* баа баанын стационардык мааниге салыштырмалуу термелүүлөргө ээ болгон тең салмактуу маанисине умтулат дегенди билдирет. Анын үстүнө бул термелүүлөрдүн амплитудасы убакыттын өсүүсү менен азаят жана $t \to \infty$ болгондо нөлгө умтулат.

Мисал 8.5.4. Чалгынчы жөнүндө маселе.

Жашырындалган бир шаарчада туптуура 100 000 жумушчу жана кызматчы үч ири *A*, *B* жана *C* заводдо иштешкен (шаарда башка заводдор болгон эмес). Чалгынчыга кадрлардын алмашып туруусу тууралуу маалыматтарды алуу мүмкүн болгон. Бир жыл ичинде *A* заводунда иштеген ар бир миң иштөөчүдөн *20* киши *B* заводуна жана *15* киши *C* заводуна өтө турган, ошол эле мезгилде *B* заводунан *7* киши *A* заводуна жана *10* киши *C* заводунан 10 киши *B* заводуна жана 8 киши *A* заводуна өтө турган болуп чыкты. Ошондой болсо да шаарча көп жылдан бери стабилдүү тынч турмушта жашап келген. Бул шарттарда чалгынчыга ар бир заводдо иштегендердин санын аныктоо мүмкүн болду. Анын пикирлерин жана эсептөөлөрүн дифференциалдык теңдемелердин теориясына таянып кайталоого аракет жасайбыз.

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – тиешелүү түрдө *A*, *B* жана *C* заводунда иштеп жаткандардын саны болсун дейли. Анда аталган заводдордогу кадрлардын санынын өзгөрүү ылдамдыгына туура келет жана, ошондуктан, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функцияларынын t боюнча биринчи туундуларына барабар.

Кадрлардын алмашып туруусу жөнүндө жогоруда келтирлген маалыматтарды пайдаланып, төмөндөгү дифференциалдык теңдемелердин системасын түзөбүз:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -0{,}035x + 0{,}007y + 0{,}008z,\\
&\frac{dy}{dt} = 0{,}020x - 0{,}017y + 0{,}010z,\\
&\frac{dz}{dt} = 0{,}015x + 0{,}010y - 0{,}018z,\\
&x(0) + y(0) + z(0) = 100000.
\end{aligned}\right\}$$

Кадрлардын алмашып туруусун сүрөттөгөн сызыктуу үч дифференциалдык теңдеменин системасына кошулган акыркы барабардык нормаланган деп аталган теңдемени көрсөтөт. Башка жагынан, бул катнаш келтирилген системанын Коши маселесин чыгаруу үчүн баштапкы шарттарды аныктайт.

$$X^T = (x, y, z),\ \frac{dX^T}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

белгилөөлөрдү кийирип (T – транспонировкалоо белгиси) жана системанын

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}035 & 0{,}007 & 0{,}008 \\ 0{,}020 & -0{,}017 & 0{,}010 \\ 0{,}015 & 0{,}010 & -0{,}018 \end{pmatrix}$$

матрицасын жазып, дифференциалдык теңдемелердин матрица түрүндөгү $\frac{dX}{dt} = AX$ системасына ээ болобуз. Дифференциалдык теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын алуу үчүн

$$(A - \lambda\mathrm{E}) = \begin{pmatrix} -0{,}035-\lambda & 0{,}007 & 0{,}008 \\ 0{,}020 & -0{,}017-\lambda & 0{,}010 \\ 0{,}015 & 0{,}010 & -0{,}018-\lambda \end{pmatrix}$$

мүнөздөгүч матрицасынын,

$$\det(A - \lambda\mathrm{E}) = \begin{vmatrix} -0{,}035-\lambda & 0{,}007 & 0{,}008 \\ 0{,}020 & -0{,}017-\lambda & 0{,}010 \\ 0{,}015 & 0{,}010 & -0{,}018-\lambda \end{vmatrix}$$

мүнөздөгүч аныктагычын жазабыз жана акыркыны нөлгө барабарлап, матрицанын $\lambda_1 = -0{,}0423$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0{,}0276$ өздүк сандарын, ал эми андан кийин табылган λ_i, $i = 1,2,3$ өздүк сандарына туура келген B_i, $i = 1,2,3$ өздүк векторлорун табабыз:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -0{,}8043 \\ 0{,}5240 \\ 0{,}2803 \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} -0{,}2886 \\ -0{,}7145 \\ -0{,}6374 \end{pmatrix},\quad B_3 = \begin{pmatrix} 0{,}0475 \\ -0{,}7296 \\ 0{,}6821 \end{pmatrix}.$$

Натыйжада дифференциалдык теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышы

$$X=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=C_1B_1e^{-0,0423t}+C_2B_2+C_3B_3e^{-0,0276t}=$$

$$+C_1\begin{pmatrix}-0,8043\\0,5240\\0,2803\end{pmatrix}e^{-0,043t}+C_2\begin{pmatrix}-0,2886\\-0,7145\\-0,6374\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0,0475\\-0,7296\\0,6821\end{pmatrix}e^{-0,0276t}$$

мында C_i – каалагандай турактуулар.

Дифференциалдык теңдемелер системасынын алынган жалпы чыгарылышынан дифференциалдык теңдемелердин келтирилген системасы $t\to\infty$ болгондо пределдик стационардык чыгарылыштарга ээ болорун көрүү кыйын эмес. Чындыганда, бул учурда келтирилген туюнтмадагы биринчи жана экинчи кошулуучулар жок болуп кетет жана ортодогу турактуу кошулуучу гана калат.

Стационардык чыгарылыштардын өзүн дифференциалдык теңдемелер системасынын оң жактарынын нөлгө барабар болуу шарттарынан, атап айтканда

$$\frac{dx}{dt}=-0,035x+0,007y+0,008z=0,$$
$$\frac{dy}{dt}=0,020x-0,017y+0,010z=0,$$
$$\frac{dz}{dt}=0,015x+0,010y-0,018z=0,$$
$$x(0)+y(0)+z(0)=100000,$$

б. а. кандайдыр бир сызыктуу барабардык менен байланышкан үч белгисиздүү сызыктуу үч алгебралык теңдеменин системасын чыгаруу аркылуу табуу ыңгайлуу.

Натыйжада үч заводдо иштегендердин санынын белгиленген маанилерин көрсөткөн дифференциалдык теңдемелер системасынын стационардык чыгарылышын алабыз: $x=17600,\quad y=43600,\quad z=38800$.

Корутунду: математикалык анализди жана дифференциалдык теңдемелер теориясын билүү экономиктер үчүн гана эмес, чалгынчылар үчүн да пайдалуу.

Өз алдынча иштөө үчүн маселелер

№239. Кандайдыр товарга суроо жана сунуштун функциялары $d(p) = 70 + 2p - 5\dfrac{dp}{dt}$ түрүнө ээ. Эгерде $p(0)=10$ болсо, тең салмактуу баанын убакыттан көз карандылыгын тапкыла.

№240. $y(t)$ – кандайдыр ишкананын продукция чыгаруу интенсивдүүлүгү болсун дейли. Чыгаруунун өсүүсү менен рыноктун толуусу ишке ашат жана товардан $p(y)$ баасы төмөндөйт деп болжолдонот. Маселен, $p(y) = b - ay$ $(a, b > 0)$ болсун дейли. Продукция чыгаруу интенсивдүүлүгүнүн өсүү ылдамдыгы кирешенин өсүүчү функциясы болуп саналат. $y(t)$ функциясы үчүн дифференциалдык теңдемени түзгүлө жана аны чыгаргыла.

№241. Каралган регион үчүн убакыттын бирдигинде төрөлгөндөрдүн саны жана каза болгондордун саны калктын санына пропорциялаш экендиги статистикалык маалыматтардан белгилүү, булардын пропорционалдык коэффициенттери тиешелүү түрдө k_1 жана k_2 ге барабар. Калктын санынын убакыттын өтүүсү менен өзгөрүү законун тапкыла.

№242. Суроо жана сунуш $d(p) = \alpha - \beta p - \eta\dfrac{dp}{dt}$, $s(p) = \delta p$ функциялары менен берилсин, мында $\alpha, \beta, \eta, \delta > 0$. Бардык t лар үчүн $d(t) = s(t)$ деп болжолдоп, $p(t)$ функциясын тапкыла.

№243. Суроо жана сунуш

$d(p) = \alpha - \beta p + \sigma\dfrac{dp}{dt}$, $s(p) = -\gamma + \delta p$ $(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, \delta > 0)$ функциялары аркылуу берилсин. Баанын өзгөрүү ылдамдыгын канааттанбаган $d(p) - s(p)$ суроого түз пропорциялаш деп болжолдоп, $p(t)$ функциясын тапкыла.

№244. Эгерде суроонун жана сунуштун прогнозу $d(p) = p'' - 2p' - 2p + 10$, $s(p) = 2p'' + 2p' + 4p + 4$ катнаштары менен сүрөттөлсө, анда товарга p баанын динамикасын тапкыла.

№245. Эгерде суроонун баага салыштырмалуу серпилмелүүлүгү $E_p(t) = -1$ болсо жана баанын $d = 2$ болгондогу

$p = 10$ мааниси берилсе, анда суроонун $d = d(p)$ функциясын тапкыла.

№246. Эгерде суроонун серпилмелүүлүгү $E_p(d) = \dfrac{d-100}{d}$ түрүнө ээ болсо жана $d = 90$ $0 < d < 100)$ болгондо $p = 10$ болсо, анда суроонун $d = d(p)$ функциясын тапкыла.

№247. Кандайдыр бир тармактагы адистердин саны $y(t)$ болсун. Адистердин санынын өсүү ылдамдыгы төмөнкү фактор-лор менен аныкталат: биринчиден, бул адистердин санынын өзү менен, экинчиден, адистер канчалык көп болсо, аларга жакшы жумушту табуу ошончолук кыйын болот жана, үчүнчүдөн, адистердин бөлүгү бул тармактан кетип калуусу мүмкүн. Бул факторлорду эсепке алып, $\dfrac{dy}{dt} = ay(1-y) - Q$ теңдемесин алуу мүмкүн, мында Q чоңдугу «мээлердин азаюу» масштабын мүнөздөйт. Каралган тармактагы адистердин санынын динамикасын тапкыла.

№248. Экономиканын чыгаша жана киреше бөлүктөрүнүн динамикасынын негизги компоненттерин өз ичине алган эң жөнөкөй баланстык модель каралат. $Y(t), E(t), S(t), J(t)$ тиешелүү түрдө улуттук киреше, мамлекеттик чыгашалар, керектөө жана инвестициялар болушсун. Кейнстин динамикалык модели үчүн төмөнкү катнаштар туура болсун:

$$Y(t) = S(t) + J(t) + E(t),$$

$$S(t) = aY(t) + b, \ \ 0 < a < 1,$$

$$J(t) = kY'(t),$$

мында *a, b, k, E* – берилген.

Y(t) улуттук киреше үчүн диффренциалдык теңдемени түзгүлө.

№249. Харрод – Домардын модели *c(t)* керектөө менен *J(t)* инвестициялардын суммасы катары каралган *y(t)* кирешенин динамикасын сүрөттөйт. Экономика жабык деп эсептелет, ошондуктан таза экспорт нөлгө барабар, ал эми мамлекеттик чыгашалар моделде ажыратылбайт. Кирешенин өсүү ылдамдыгы инвестицияларга пропорциялаш деп болжолдонот.

Моделдин $c(t)=0$ учур үчүн дифференциалдык теңдемесин түзгүлө жана чыгаргыла.

№250. X жана Y өлкөлөрү деп аталган эки кошуна өлкөнүн конфликтик жагдайы каралат. $t \geq 0$ убакыт учурундагы X өлкөсүнүн куралданууга чыгашалары $x = x(t)$, ал эми Y өлкөсүнүн $y = y(t)$ болсун дейли.

X өлкөсү Y өлкөсү тарабынан согуштун потенциалдык коркунучунан чочуп куралданат, ал эми Y өз учурунда X өлкөсү куралданууга чыгымдарды өстүрүп жатканын билип, куралданууга өз чыгашаларын көбөйтөт деп болжолдоп, курал – жарактарды көбөйтүү моделин түзгүлө.

№251. «Инфляция – жумушсуздук» модели төмөнкү үч теңдеменин системасы түрүндө көрсөтүлүшү мүмкүн:

$$\begin{cases} p = \alpha - T - \beta U + h\pi, (\alpha, \beta > 0, 0 < h \leq 1), \\ \dfrac{d\pi}{dt} = j(p - \pi), (0 < j \leq 1), \\ \dfrac{dU}{dt} = -k(m - p), (k > 0), \end{cases} \tag{8.5.4}$$

мында U– өсүү темпи, $p = \dfrac{\dot{P}}{P}$ – баалардын деңгээлинин өсүү темпи (инфляциянын темпи), T – эмгек өндүрүмдүүлүгү, π – инфляциянын күтүлгөн темпи, $m = \dfrac{\dot{M}}{M}$ – номиналдык M акча балансынын өсүү темпи, $m - p = \dfrac{\dot{M}}{M} - \dfrac{\dot{P}}{P}$ – реалдык акчалардын өсүү темпи.

(8.5.4) системасын $\pi(t)$ жана $U(t)$ ларга салыштырмалуу эки дифференциалдык теңдеменин системасына келтирүү жана алынган системаны параметрлердин $\alpha - T = \dfrac{1}{6}; \beta = 3; h = 1; j = \dfrac{3}{4}; k = \dfrac{1}{2}$ маанилери үчүн чыгаруу талап кылынат.

№252. Акчалар рыногундагы тең салмактуулуктун төмөнкү спецификациясын карайбыз:

$$m(t) - p(t) = -\lambda\pi(t), \lambda > 0, \tag{8.5.5}$$

мында m – номиналдык акча камсыздоо логарифми, p – баалар деңгээлинин логарифми, $\pi = \dot{p}$ – инфляциянын темпи (чыныгы дагы, күтүлгөн дагы, б.а. инфляциянын алдын ала ачыктыгы болжолдонот).

(8.5.5)ти убакыт боюнча дифференциалдап, инфляциянын темпине салыштырмалуу дифференциалдык теңдемени алуу мүмкүн. Номиналдык акча камсыздоо туруктуу $\dot{m} = \mu$ темп менен өсөт деп болжолдоп, алынган теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

Тиркеме

Эйлер, Эйлер-Коши жана Рунге-Кутта методдору аркылуу I тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин сандык чыгарылышынын pascal тилиндеги программасы

```
program DifEquationsofFirstOrder;

{*******************************************************}
       Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме  үчүн
       Коши маселесин Эйлер, Эйлер-Коши, Рунге-Кутта
                  методдору менен чыгаруу.

{*******************************************************}
uses Crt;
const c:array [1..4] of real=(0,0.5,0.5,1);
type
     coef:=array [0..4] of real;
Var
     i,j,m:integer;
     a,b,h,x,y,y1,y2,y3, eps: real;
     k0,k:coef;
     ch:char;

                         Программалар
  { f(x,y) функциясы – дифференциалдык теңдеменин оң жагы }.

function f(x,y:real):real;
       BEGIN
              f:=x+y;
       END;
                       Негизги  программа

BEGIN
       ClrScr;

WRITELN (‘ [a,b] кесиндисинин акыркы маанилерин
киргизгиле’);
```

```
READ (a,b);

WRITELN ('x=x0 болгондо y0 функциясынын баштапкы
маанисин киргизгиле');
READ (y);

WRITELN ('(a,b] аралыгында функциялардын маанилеринин
санын киргизгиле');
READ (m);

WRITELN ('эпсилонду киргизгиле');
READLN (eps);
x:=a; h:=(b-a)/m; y1:=y; y2:=y; y3:=y;

WRITELN ('  Эйлер методу, Эйлер-Коши методу, Рунге-Кутта
методу');
WRITELN ('x=,'x:5:2,'y1=,'y1:9:6,'y2=,'y2:9:6,'y3=,'y3:9:6');

FOR i:=1 TO m DO
        BEGIN
                y1:=y1+h*f(x,y1);  {   <------: Эйлер методу }
FOR j:=1 TO 2 DO
        k0[j]:=h*f(x+2*c[j]*h, y2+2*c[j]*k0[j-1]);

        y2:=y2+(k0[1]+k0[2])/2;   {  < ------- : Эйлера-Коши методу }

FOR j:=1 TO 4 DO                  {  < --------: Рунге-Кутта методу }
k[j]:=h*f(x+c[j]*h, y3+c[j]*k[j-1]) / eps;
y3:=y3+(k[1]+2*k[2]+2*k[3]+k[4])/6;
x:=x+h;

WRITELN ('x=,'x:5:2,'y1=,'y1:9:6,'y3=,'y3:9:6);
END;
READLN
END.
```

ЖООПТОР

№3. $y = ce^{kx}$. **№4.** $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$, $T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$, *1 саат.*

№5. $\frac{dp}{dh} = -kp$, $p = 0{,}92^{\frac{h}{500}}$. **№6.** *1575 жылда.*

№7. $y(x) = 2e^x - x - 1$. **№10.** $y^2 - x^2 = c$.

№11. $y^3 + x^3 - 3x = c$. **№12.** $y^2 + x^2 = c$. **№13.** $y = cx^2$.

№14. $y = c(x+1)e^{-x}$. **№15.** $e^x + e^{-y} = c$.

№16. $arctgy + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c$. **№17.** $y = ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \pm 1$.

№18. $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + c}$. **№19.** $y = x\left(2arctgCx + \frac{\pi}{2} + \pi(2n-1)\right)$,

$y = x\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $n, k \in Z$. **№20.** $x^2 - 2xy - y^2 = c$.

№21. $\arcsin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - y^2} - \ln|x| = c$, $y = \pm x$. **№22.** $xe^{y/x} = c$, $x = 0$.

№23. $e^{y/x} = cy$, $y = 0$. **№24.** $e^{-e^{-y/x}} = cx$. **№25.** $y = x \arcsin Cx$,

$y = K\pi x$, $K \in Z - \{0\}$. **№26.** $y = x\sin(\ln|x| + c)$, $y = \pm x$.

№27. $y = c(y^2 - x^2)$, $y = \pm x$. **№28.** $y = \frac{a}{\lambda} + ce^{-\lambda x}$.

№29. $y = c(1 + x^2)$. **№30.** $y = \frac{c}{x} + x^2$. **№31.** $y = x(c - x)$, $x = 0$

$(y \neq 0)$. **№32.** $y = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{|x|} + \frac{c}{x}$. **№33.** $y = e^{x^2}\left(\int e^{-x^2}dx + c\right)$.

№34. $y = ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$. **№35.** $y = x\ln x + \frac{c}{x}$.

№36. $y = \frac{1}{ce^{2x} - e^x}$. **№37.** $\sqrt{y} = c\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1 - x^2)$.

№38. $x = \dfrac{1}{ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2}$. **№39.** $x^2 + xy + y^2 = c$.

№40. $5x^2y - 8xy + x + 3y = c$. **№41.** $xy - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = c$.

№42. $x^2 + ye^{-x} = c$. **№43.** $x^2 - y^2 + 2xy = c$. **№44.** $x - \dfrac{y}{x} = c$.

№45. $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{y} = c$. **№46.** $x^2y^2 + 2\ln\dfrac{x}{y} = c$. **№47.** $x^2 - y^2 - 1 = cx$.

№48. $x^2 + y^2 = c(y-1)^2$. **№49.** $y^2 + x^2y + 2xy^2 + \ln(x+y) = c$.

№50. $x = 2p + 6p^2 + c$, $y = p^2 + 4p^3$; $y = 0$.

№51. $x = 2\sqrt{p^2+1} - \ln\left(1 + \sqrt{p^2+1}\right) + \ln p + c$, $y = p\sqrt{1+p^2}$; $y = 0$ (өзгөчө чыгарылыш). **№52.** $x = p^3 - p + 2$, $y = \dfrac{3}{4}p^4 - \dfrac{p^2}{2} + c$. **№53.** $x = p + \sin p$, $y = \dfrac{1}{2}p^2 + p\sin p + \cos p + c$.

№54. $x = 2t + t^2$, $y = t^2 + \dfrac{2}{3}t^3 + c$. **№55.** $x = p\cos p$, $y = p^2\cos p - p\sin p - \cos p + c$. **№56.** $x = \dfrac{c + \ln|p| - p}{(1-p)^2}$; $y = \dfrac{(c + \ln|p| - p)p^2}{(1-p)^2} + p$ жана $y = 0$, $y = x + 1$ өзгөчө чыгарылыштары. **№57.** $y = cx^2 + \dfrac{1}{c}$, $y = \pm 2x$. **№58.** $y = cx - c^2$, $y = \dfrac{x^2}{4}$. **№59.** $x = \dfrac{c}{p} - p$, $y = -xp + p^2$. **№60.** $y = cx + c + e^c$; $y = (x+1)\ln(-x-1) - x - 1$. **№61.** $y = -\dfrac{x^2}{4}$. **№62.** $y = \pm 2x$.

№63. $y = 0$. **№64.** $y = cx$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$.

№65. $\frac{x^2}{2}+y^2=c$. №66. $r=ce^{\theta}$. №67. $r=c$. №68. $y^2-x^2=c$. №70. $y=cx$ $(x\neq 0)$. №71. $y=cx^2$. №72. $y'<x^2$.

№73. $y'>0$. №78. $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+c_1x+c_2$.

№79. $c_1^2y=c_1x-\ln|c_1x+1|+c_2$, $y=\frac{x^2}{2}+c$, $y=c$.

№80. $\begin{cases} x=e^t-t^2, \\ y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}-\left(\frac{2}{3}t^3-2t+2-c_1\right)^{e^t+\frac{4}{15}t^5-c_1t^2+c_2} \end{cases}$

№81. $y=\pm\frac{4}{3}(x+c_1)^{\frac{3}{2}}+c_2x+c_1$. №82. $\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy+c_1}}=\pm x+c_2$.

№83. $y=c_2e^{\frac{c_1}{2}x^2}$. №84. $y''-y'-6y=0$, $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$.
№85. $y''-2y'+y=0$, $y=(c_1+c_2x)e^x$. №86. $y''-6y'+13y=0$, $y=(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)e^{3x}$. №87. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{4x}$.

№88. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$. №89. $y=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

№90. $y=e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$. №91. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

№92. $y=e^{3x}(c_1+c_2x)$. №93. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-\frac{4x}{3}}$.

№94. $y=e^x\left(c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\sin\frac{x}{2}\right)$. №95. $y=e^x$. №96. $y=(7-3x)e^{x-2}$.

№97. $y=-x^2+x-3+c_1e^x+c_2e^{-x}$. №98. $y=\frac{1}{2}+c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$.

№99. $y=3x+c_1+c_2e^{-x}$. №100. $y=-\sin x+2\cos x+c_1e^x+c_2e^{-x}$.

№101. $y=-\frac{1}{4}x\cos 2x+c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

№102. $y=\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x+c_1\cos x+c_2\sin x$.

№103. $y=e^x(x\cos x+\sin x)+c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$. **№104.** $k\neq 0$ болгондо $\widetilde{y}=Ax+B$; $k=0$ болгондо $\widetilde{y}=x(Ax+B)$. **№105.** $k\neq -a^2$ болгондо $\widetilde{y}=Ae^{ax}$; $k=-a^2$ болгондо $\widetilde{y}=Axe^{ax}$.

№106. $\omega\neq k$ болгондо $\widetilde{y}=A\cos\omega x+B\sin\omega x$; $\omega=k$ болгондо $\widetilde{y}=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$. **№107.** $\widetilde{y}=Axe^{-x}+x(Bx+c)$.

№108. $\widetilde{y}=e^x[(A_1x+A_2)\cos x+(B_1x+B_2)\sin x]$.

№109. $\widetilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)$. **№110.** $y=e^{2x-1}-2e^x+e-1$.

№111. $2\cos x-5\sin x+2e^x$.

№112. $y=e^x((2x-\pi-1)\sin x-\pi\cos x)$.

№113. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\sin x\cdot\cos x+\cos x\ln tg\left|\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right|$.

№114. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\frac{x}{2}\sin 2x$.

№115. $y=\frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-x}}{x}dx-\frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{x}dx+c_1e^x+c_2e^{-x}$.

№116. $y=\frac{1}{x}+e^x(c_1+c_2x)$. **№117.** $y=\frac{e^x}{x}+c_1+c_2e^x$.

№118. а) ооба; б) ооба; в) ооба; г) жок; д) ооба. **№119.** а) 1; б) $-\frac{2}{x}$ $x\neq 0$; *в)* 0; *г)* e^{-2x}. **№120.** $(x-1)y''-xy'+y=0$. **№121.** $y''-y=0$. **№122.** $y'''=0$. **№123.** $xy'''-y''+xy'-y=0$. **№124.** $a_0(x)=W(x)$, $a_1(x)=-W'(x)$, $a_2(x)=W(y_1',y_2')$, мында $W(x)\equiv W(y_1,y_2)$ - Вронский аныктагычы. **№125.** $\omega\neq 1$.

№126. $k\neq\sqrt{2}$. **№127.** $y=c_1x^2+c_2x^{-\frac{1}{2}}$. **№128.** $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)\cos x+(c_4+c_5x)\sin x$. **№129.** $y=c+c_1e^{2x}+c_3e^{3x}$. **№130.** $y=c_1e^{2x}+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x$.

№131. $y = c_1 e^{-x} + c_2 + c_3 e^{x}$. **№132.** а) $q \neq 0$ болгондо $y_1 = A$, $q=0$ болгондо $y_1 = Ax$. б) $y_1 = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x$. в) $y_1 = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + x(Cx^2 + Dx + F)$. **№133.** $y = c_1 x + c_2 x^3$.
№134. $c_1\sqrt{x} + c_2 \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **№135.** $y = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)$.

№136. $y = \sqrt{x}\left[c_1 \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + c_2 \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right]$. **№137.** $y = x\ln^3 x + x(c_1 + c_2 \ln x)$.
№138. $y = x\ln x + x(c_1 \cos\ln x + c_2 \sin\ln x)$. **№139.** $y(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2ch1}$. **№140.** $y = \alpha \sin x$.
№141. $y = -e^{x}\sin x$. **№142.** $\lambda = n$. $y = \cos nx$, $n = 1,2,...$
№143. $y = 0$.
№144. 1) $\lambda - \omega^2 < 0$, $y \equiv 0$; 2) $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, $y \equiv c = const$; 3) $\lambda - \omega^2 > 0$, $y = c_1 \cos 2n\pi x + c_2 \sin 2n\pi x$. **№145.** $\lambda = \lambda_k = -\left(\dfrac{1}{2} + k\right)^2 \dfrac{\pi^2}{l^2}$, $k = 0,1,2,...$ $y_k(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2} + k\right)\dfrac{\pi x}{l}$, $k = 0,1,2,...$. **№146.** $G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}e^{x-s}, & -\infty \leq x \leq s \\ -\dfrac{1}{2}e^{s-x}, & s \leq x < +\infty. \end{cases}$

№147. $G(x,s) = \begin{cases} -x(1-s), & 0 \leq x \leq s \\ -(1-x)s, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$

№148. $y_1 = 1 + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \dfrac{x^{3r}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(r-1)3r} + \cdots$,
$y_2 = x + \dfrac{x^4}{3\cdot 4} + \dfrac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \dfrac{x^{r+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots 3r(3r+1)} + \cdots$, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

№149. $y_1 = 1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots, y = c_1$ $y_1 + c_2 y_2$.

$$y_2 = x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots.$$ **№150.**

$y_1 = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} + \cdots,\ y_2 = x + \frac{12}{5!}x^5 + \cdots, y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

№151. $y = c_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + c_2 J_{-\frac{1}{2}}(x)$.

№152. $y = c_1 J_{\frac{1}{3}}(2x) + c_2 J_{-\frac{1}{3}}(2x)$. **№153.** $t = kx$,

$t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - n^2\right)y = 0$.

№154. $y'' + py' + qy = 0$, мында y - жиптин вертикалдан болгон жантаюу бурчу.

<u>Көрсөтмө.</u> M материалдык чекити радиусу l болгон айлана боюнча кыймылдайт. Ошондуктан, M чекитинин убакыттын t моментиндеги айланада болгон абалы, жиптин вертикалдан болгон $y = y(t)$ жантаюу бурчу менен бир маанилүү түрдө мүнөздөлөт, p коэффициенти чөйрөнүн каршылыгын сүрөттөйт.

№155. $x = c_1 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}} + c_2\right)$, $y = \frac{3}{2}c_1 \sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}} + c_2\right)$;

$x = c_3 \sin\left(at + c_4\right)$, $y = -c_3 \sin\left(at + c_4\right)$.

№156.

$$I = e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{E}{\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)^2 + R^2}\left[\left(L\omega - \frac{1}{c\omega}\right)\cos(\sqrt{\frac{1}{Lc} - \frac{R^2}{4L^2}}t) - \frac{R}{2}\left(\omega + \frac{1}{Lc\omega}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Lc} - \frac{R^2}{4L^2}}}\times\right.$$

$$\left.\times \sin(\sqrt{\frac{1}{Lc} - \frac{R^2}{4L^2}})t\right] + \frac{E}{\left(\frac{1}{c\omega} - L\omega\right)^2 + R^2}\left[\left(\frac{1}{c\omega} - L\omega\right)\cos\omega t + R\sin\omega t\right],$$

$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{c}I=\frac{de}{dt}$ дифференциалдык теңдеме. **№157.** $I=\frac{E}{2L}t\sin\frac{1}{Lc}t$. Чындыгында, $\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t$ алабыз. Чынжырдагы дифференциалдык теңдеме: $L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{c}I=E\omega\cos\omega t$. Тиешелүү бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы: $I_0=c_1\cos\frac{1}{Lc}t+c_2\sin\frac{1}{Lc}t$. Сызыктуу бир тектүү эмес теңдеменин айрым чыгарылышы $\overline{I}=t(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$ түрүнө ээ. Анда

$$\frac{d\widetilde{i}}{dt}=t(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t)+A\cos\omega t+B\sin\omega t;$$

$$\frac{d^2\widetilde{i}}{dt^2}=t\left(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t\right)+\left(-2A\sin\omega t+2B\cos\omega t\right).$$

Теңдемеге $\widetilde{i}$ жана $\frac{d^2\widetilde{i}}{dt^2}$ ни коюп жана $L\omega^2-\frac{1}{c}=0$ экенин эсепке алып $L(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t)=E\omega\cos\omega t$ теңдештигин алабыз, мындан $A=0$, $B=\frac{E}{2L}$. Демек, $\widetilde{I}=\frac{E}{2L}t\sin\frac{t}{\sqrt{Lc}}$. Жалпы чыгарылыш:

$$i=c_1\cos\frac{1}{\sqrt{Lc}}t+c_2\sin\frac{1}{Lc}t+\frac{E}{2L}t\sin\frac{1}{\sqrt{Lc}}t.$$

$$\frac{di}{dt}=-\frac{c_1}{\sqrt{Lc}}\sin\frac{1}{\sqrt{Lc}}t+\frac{c_2}{\sqrt{Lc}}\cos\frac{1}{\sqrt{Lc}}t+\frac{E}{2L\sqrt{Lc}}\cos\frac{1}{\sqrt{Lc}}t+\frac{E}{\sqrt{Lc}}\sin\frac{1}{\sqrt{Lc}}t$$

ны эсептеп жана башталгыч шарттарды пайдаланып, $c_1=c_2=0$ дү табабыз. Изделген айрым чыгарылыш: $I=\frac{E}{2L}t\sin\frac{1}{\sqrt{Lc}}t$. **№158.** $0<k<1$. **№159. а)** $y_1'=y_3$, $y_2'=y_4$, $y_3'=2y_1-3y_2$, $y_4'=y_1-2y_2$; **б)** $y'=v$, $z'=\omega$, $u'=t$,

$v' = v + \omega$, $\omega' = \omega + t$, $t' = t + v$. **№160.** **а)** $y_1' = z$, $z' = u$, $u' = xyz - z^2$;

б) $y' = u$, $u' = v$, $v' = \omega$, $\omega' = y^2$. **№161.** $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$, $z(x) = 2c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{3x}$. **№162.** $y = x + \dfrac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}$, $z = c_2 e^{c_1 x}$; $y = x - e^x$, $z = e^{-x}$. **№163.** $x^2 + y^2 = c_1^2$, $arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - t = c_2$. **№164.** **а)** $y = \dfrac{1}{x^2 + c_1}$, $z = x(c_2 - \ln|x|)$; **б)** $e^y - e^x = c_1$, $x = z\left(c_2 - \dfrac{1}{2}z\right)$. **№165.** $y = c_1 x^{1+\sqrt{2}} + c_2 x^{1-\sqrt{2}}$, $z = x^{\sqrt{2}-1} c_1 (2 + \sqrt{2}) + x^{-\sqrt{2}-1} c_2 (2 - \sqrt{2})$.

№166. $x = c_1 t + \dfrac{c_2}{t}$, $y = -c_1 t + \dfrac{c_2}{t}$. **№167.** $x = \dfrac{c_2}{t^2}$, $y = c_1 e^t - \dfrac{c_2}{t^2}$. **№168.** $W(2\pi) = W(0) = 2$. **№169.** Ооба. Системанын жалпы чыгарылышы: $x = c_1 e^{-\cos t} - c_2 e^{\sin t}$, $y = -c_1 e^{-\cos t} + 2c_2 e^{\sin t}$. **№170.** $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$, $z = c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{3x}$; $y = e^{2x} - e^{3x}$, $z = e^{2x} - 2e^{3x}$. **№171.** $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$, $z = e^{2x}(c_1 \sin 3x - c_2 \cos 3x)$. **№172.** $y = 2e^{-2x}\left(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x\right)$, $z = e^{-2x}\left[\left(3c_1 - \sqrt{3}c_2\right)\cos\sqrt{3}x + \left(\sqrt{3}c_1 + 3c_2\right)\sin\sqrt{3}x\right]$. **№173.** $x = e^{-t}(c_1 + c_2 t)$, $y = e^{-t}[2c_1 + c_2(2t - 1)]$. **№174.** $y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x)$, $z = e^{-2x}[-c_1 + c_2(1 - x)]$. **№175.** $x = (c_2 + c_3)\cos t + (-c_2 + c_3)\sin t$, $y = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$, $z = c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t$; $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$, $z = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$.

№176. $x = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{18}$, $y = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-3t} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{12}$.

№177. $x=(c_1\cos t+c_2\sin t-1)e^t$, $y=(c_1\sin t-c_2\cos t)e^t$.

№178. $x=\left(c_1+c_2t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}-3e^t\right)e^{2t}$, $y=\left(c_1-\frac{c_2}{3}+c_2t+\frac{t^3}{2}-2e^t\right)e^{2t}$.

№179. $x=c_1\cos t+c_2\sin t-t\cos t$, $y=(c_2-c_1)\cos t-(c_2+c_1)\sin t+t(\cos t+\sin t)$. **№180.** $y_1=x^2+c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$, $y_2=x+2+c_1e^{2x}+2c_2e^{3x}$; $y_1=x^2$, $y_2=x+2$.

№181. $y=2e^{2x}+c_1e^x+c_2e^{-x}$, $z=5e^{2x}+3c_1e^x+c_2e^{-x}$.

№182. $x=2\cos 2t+3\sin 2t+2e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$,

$$y=7\sin 2t+e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(c_1-\sqrt{3}c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(\sqrt{3}c_1+c_2\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].$$

№183. $x=\frac{a(1-2^{-t})}{4}$, $y=\frac{3a(1-2^{-t})}{4}$. Дифференциалдык теңдемелер системасы: $\dot{x}=k_1(a-x-y)$, $\dot{y}=k_2(a-x-y)$.

№184. $x=a\cos\frac{k}{\sqrt{m}}t$, $y=\frac{v_0\sqrt{m}}{k}\sin\frac{k}{\sqrt{m}}t$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{k^2y^2}{mv_0^2}=1$.

Кыймылдын дифференциалдык теңдемелери: $m\ddot{x}=-k^2x$, $m\ddot{y}=-k^2y$.

№185. а) $O_1(-1;0)$, $O(0;0)$, $O_2(1;0)$; **б)** $O_1(2;4)$, $O_2(-1;-2)$; **в)** $(3;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$ и $(-3;0)$. **№186. а)** асимптотикалык туруктуу; **б)** туруктуу эмес; **в)** туруктуу эмес; **г)** туруктуу; **д)** туруктуу эмес; **е)** асимптотикалык туруктуу.

№187. Туруктуу эмес фокус. **№188.** Ээрче. **№189.** Туруктуу эмес фокус.

№190. Туруктуу түйүн. **№191.** Туруктуу түйүн. **№192.** p нын эч кандай маанисинде. **№193.** $|p|\geq 2$. **№194.** $V=x^2+y^2$ туруктуу. **№195.** $V=x^2+y^2$ туруктуу эмес. **№196.** $V=x^4+y^4$ туруктуу. **№197.** $V=x^2+y^2$ туруктуу эмес.

№198. $V = 2x^2 + y^2$ асимптотикалык туруктуу. **№199.** $V = y^2 - \frac{1}{2}x^2$; туруктуу эмес. **№200.** $V = 2x^2 + 3y^2$ асимптотикалык туруктуу.
№201. Туруктуу. **№202.** Туруктуу эмес. **№203.** Туруктуу эмес.
№204. Туруктуу.
№205. Асимптотикалык туруктуу. **№206.** Туруктуу эмес.
№207. **а)** $V = 3x^2 + 4y^2$ асимптотикалык туруктуу. **б)** $V = 3x^2 + 2y^2$ асимптотикалык туруктуу.

№227. $y = \frac{1}{x} + \varepsilon\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{x^5}{7} + \frac{2x}{3} - \frac{32}{21x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + \cdots$.

№228. $y = 2\sqrt{x} + 2\varepsilon\left(x^{-1/2} - x^2\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{4}x^{7/2} - \frac{4}{3}x + \frac{25}{12}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) + \cdots$.

№229. $y = 1 + \varepsilon\left(x^2 - x\right) + \varepsilon^2 x(1-x)^3 / 6 + \cdots$.

№230. $y = \frac{1}{x} + 3\varepsilon + \varepsilon^2\left(\frac{3}{x^2} - 3x\right) + \cdots$.

№231. $y = x - \varepsilon(x+1) + \left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(e^x - x^2 - 2x - 1\right) + \cdots$

№232. Туруктуу эмес. **№233.** $y = 0$ туруктуу эмес, $y = x^4 + 1$ туруктуу. **№234.** $y = x$ туруктуу, $y = e^x$ туруктуу эмес. **№235.** $x < 0$ болгондо $y = x$ жана $x > 0$ болгондо $y = -x$ туруктуу.
№236. $x < 0$ болгондо $y = 0$ туруктуу. **№237.** Туруктуу эмес.
№238. Туруктуу эмес.

№239. $p(t) = 10e^{4t} - 5$. **№240.** $\frac{dy}{y(b-ay)} = kdt,\ y(t) = \frac{Cbe^{bkt}}{1+Cae^{bkt}}$, мында C – каалаган турактуу. **№241.** $y(t) = Ce^{kt}$, $k = k_1 - k_2$.

№242. $p(t) = \frac{\alpha}{\beta+\delta} + Ce^{\frac{\beta+\delta}{\eta}t}$. **243.** $p(t) = \frac{\alpha}{\beta+\sigma} + Ce^{\frac{k(\beta+\delta)}{1-k\sigma}}$.

№244. $p(t) = p_0 + p_r = 1 + e^{12t}\left(C_1 \cos t\sqrt{2} + C_2 \sin t\sqrt{2}\right)$.

№245. $d(p)=\frac{20}{p}$. **№246.** $d(p)=100-\frac{100}{p}$.

№247. $\frac{1}{2\sqrt{b}}ln\left|\frac{y-\frac{1}{2}-\sqrt{b}}{y-\frac{1}{2}+\sqrt{b}}\right|=-at+c.$ **№248.** $\frac{dY}{dt}-\frac{1-a}{k}Y=\frac{b+E}{k}.$

№249. $\frac{dY}{dt}=by, y=ce^{bt}, c-$ турактуу.

№250. $\frac{dx}{dt}=\alpha y, \frac{dy}{dt}=\beta x, (\alpha,\beta>0).$

№251. $\pi(t)=e^{-\frac{3}{4}t}(c_1\cos\frac{3}{4}t+c_2\sin\frac{3}{4}t)+m$

$$U(t)=\frac{e^{-\frac{3}{4}t}}{3}(c_1-c_2)\cos\frac{3}{4}t+(c_1+c_2)\sin\frac{3}{4}t)+\frac{1}{18}.$$

№252. $\pi(t)=\mu+ce^{\theta t}$.

АДАБИЯТТАР

1. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б., Кененбаева Г.М. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - Бишкек: Турар, 2005. -227с.
2. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр 2-бөлүк. -Фрунзе: Мектеп, 1969. - 432 б.
3. Жаныбеков Ч.Д., Усубакунов Р. Математикалык терминдердин кыргызча-орусча сөздүгү –Бишкек: Илим, 1996ж. -140б.
4. Саадабаев А. «Дифференциалдык теңдемелер курсу» – Бишкек, 1999ж. -200б.
5. Бермант А.Ф., Арамонович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: «Наука», 1967.
6. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. – Минск: «Высшая школа», 1977.
7. Еругин Н.П. и др. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: «Наука и техника», 1979.
8. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для вузов. Часть 2. Специальные разделы математического анализа. – М.: «Наука», 1986.
9. Краснов М.Л. и др. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: «Высшая школа», 1978.
10. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1960.
11. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: «Наука», 1964.
12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: «Наука», 1970.
13. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: «Высшая школа», 1989.
14. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: «Наука», 1980.
15. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1973
16. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. – Москва: Мир, 1983. -200с.

17. Калмыков С. А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 222с.
18. Иманалиев М.И., Панков П.С., Кененбаева Г.М. «Алгоритм качественного исследования сингулярно-возмущенных обыкноенных дифференциальных уравнений и автономных систем второго порядка, явление сингулярного цикла» // Доклады РАН , 1997,т.354,№6.
19. Иманалиев М.И., Панков П.С. Явление вращающегося пограничного слоя в теории сингулярно-возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады АН. – 1986, том 289,- с.536-538.
20. Иманалиев М.И., Панков П.С., Кененбаева Г.М. Алгоритм построения гарантированных границ сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений // IV Республиканская конференция “Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики”. Бишкек: КГПУ, 1996. – ЧастьI, с.43-46.
21. Иманалиев М.И., Панков П.С. Явление расщепления областей притяжения в теории сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений // Исслед. По интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, - 1998. – Вып.27. – с.16-19.
22. Панков П.С., Кененбаева Г.М. Явление практической биурации траекторий решений сингулярно-возмущенных обыкноенных дифференциальных уравнений // Там же – с.200-204.
23. Панков П.С.,Алтынникова Л.А, Джаналиева Ж.Р. Компьютерная математика (учебное пособие, часть II). – Ош: 2002.
24. Панков П.С., Кененбаева Г.М. Доказательные методы поиска устойчивых решений уравнений//Тр. Первого сов.-болгар. семинара по числовой обработке//ИПС АН СССР – Переславль-Залесский, 1988. – Деп. В ВИНИТИ 21.04.89,№2634-В89.-С. 127-136.
25. Кененбаева Г.М. Об одном приближенном способе поиска прямоугольных устойчивых областей для систем двух автономных дифференциальных уравнений //Мат-лы VIII Межреспубл. научн. конф. молодых ученых АН Киргиз. ССР, Фрунзе 1986 г.: Тез. докл. - Фрунзе, май 1986.-С.106-107.
26. Кененбаева Г.М. Доказательная аппроксимация ломаными кривых и границ двумерных областей // Препринт $N^0$16 СОАН

СССР. Информационно-оперативный материал. Часть 1 (интервальный анализ), Красноярск, 1990 г. – с.15-18.
27. Воеводин В.В. Вычислительные методы линейной алгебры. - Москва: Наука, 1977. - Глава I "Математические основы машинной арифметики".
28. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978.
29. Панкова Г.Д. Разработка математического обеспечения для доказательных вычислений на ЕС ЭВМ (Автореферат дисс. ... к. ф.-м.н.). - Новосибирск, 1982.
30. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. - Новосибирск: Наука, 1986.
31. Абиев Н. Тендемелер жана барабарсыздыктар. – Каракол: ИГУ, 2003.
32. Байзаков А.Б. О математической устойчивости равновесных уровней замкнутых водоемов (на примере озера Иссык-Куль). // Вестник КГНУ, - сер. 3, вып. 7. –Бишкек, 2001 г. – С.34-39.
33. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1985. – 239 с.
34. Журавлев С.Г., Аниковский В.В. Дифференциальные уравнения. – Москва: Экзамен, 2005. -126 с.

МАЗМУНУ

VIII Глава. Социалдык – экономикалык илимдерден алынган мисалдар менен дифференциалдык тендемелер

М.И.Иманалиев, А.Б.Байзаков,
Г.М.Кененбаева, М.Ж.Жураев.

КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ

Басууга 06.10.2006-ж. кол коюлду.
Офсет кагазы. Кагаздын форматы 60х84 1/16.
Заказ № 161. Нускасы 500 даана.

«Турар» басмасынын басмаканасында басылды.
720054, Бишкек ш., Жибек-Жолу пр., 466.